N° D'enregistrement
au C.N.R.S.
A.O. 8541

THESE DE DOCTORAT D'ETAT ES SCIENCES PHYSIQUES

présentée

A L'UNIVERSITE PARIS VI

par

M. Pierre GAURON

pour obtenir
le grade de Docteur Es-Sciences

Sujet de la Thèse : Contribution à l'étude théorique de la diffusion méson π-méson π à l'aide des propriétés générales de la matrice S.

Soutenue le 4 Juin 1973 devant la Commission d'Examen

MM.	M. LEVY	Président
	R. NATAF	Examinateurs
	R. VINH MAU	
	A. MARTIN	
	J.L. BASDEVANT	

N° D'enregistrement
au C.N.R.S.
A.O. 8541

THESE DE DOCTORAT D'ETAT ES SCIENCES PHYSIQUES

présentée

A L'UNIVERSITE PARIS VI

par

M. Pierre GAURON

pour obtenir
le grade de Docteur Es-Sciences

Sujet de la Thèse : Contribution à l'étude théorique de la diffusion méson π-méson π à l'aide des propriétés générales de la matrice S.

Soutenue le 4 Juin 1973 devant la Commission d'Examen

MM.	M. LEVY	Président
	R. NATAF	Examinateurs
	R. VINH MAU	
	A. MARTIN	
	J.L. BASDEVANT	

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

à Marie-France

- REMERCIEMENTS -

Ce travail a été réalisé au titre d'attaché de recherche au Centre National de la Recherche Scientifique, dans le cadre de la Division Théorique de l'Institut de Physique Nucléaire. Je suis reconnaissant à Messieurs les Professeurs M. Jean et M. Vénéroni de m'y avoir accueilli.

Monsieur le Professeur R. Vinh Mau a assuré la direction de cette thèse. Ses conseils, ses critiques et ses encouragements m'ont été fort utiles. Je l'en remercie vivement.

Je remercie également Monsieur le Professeur M. Levy d'avoir bien voulu présider le jury de cette thèse, ainsi que MM. les Professeurs R. Nataf, A. Martin et J.L. Basdevant d'y participer.

Les résultats présentés ici ont été obtenus au cours d'une amicale collaboration avec B. Bonnier. Je le remercie sincèrement ainsi que tous les physiciens du laboratoire avec qui j'ai eu des discussions enrichissantes.

Je suis enfin très reconnaissant à Mlle J. Durin ainsi qu' à MM. L. Duquesne et D. Bernia qui ont collaboré à la réalisation matérielle de ce travail.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544710_0003

TABLE DES MATIERES

I. INTRODUCTION 1

II. CINEMATIQUE DE LA DIFFUSION PION PION-PION 8

III. PROPRIETES D'ANALYTICITE ET DE CROISEMENT DES AMPLITUDES 14

IV. ETUDE DES ONDES PARTIELLES S, P ET D A L'AIDE DES RELATIONS DE CROISEMENT SUR LA REGION NON-PHYSIQUE 24

V. ETUDE DES ONDES PARTIELLES S ET P A L'AIDE DES RELATIONS DE CROISEMENT SUR LA REGION PHYSIQUE 40

VI. CONCLUSION 66

APPENDICES

A- PARAMETRISATION DE LA COUPURE DE GAUCHE 69

B- CALCUL DES FONCTIONS $G^{I}_{\ell}(s)$ 73

REFERENCES 77

LEGENDE DES TABLEAUX - TABLEAUX 82

LEGENDE DES FIGURES - FIGURES 89

Chapitre I

INTRODUCTION

Un grand nombre de travaux tant théoriques qu'expérimentaux ont été consacrés ces dernières années à l'étude de la diffusion meson π-meson π . Deux raisons expliquent cet effort. D'une part, le système de deux pions intervient de manière fondamentale dans les interactions fortes pion-nucléon et nucléon-nucléon où il est échangé dans les canaux croisés. La connaissance des amplitudes pion-pion à basse énergie est également nécessaire à la clarification de certains processus faibles, comme, par exemple, les désintégrations du meson K en quatre particules et en deux pions. D'autre part, la simplicité même de cette interaction en fait le sujet idéal pour le développement et l'application des idées théoriques, et, en particulier, des propriétés fondamentales d'analyticité et de symétrie de croisement de la matrice S. Ne mettant en jeu que quatre particules identiques, sans spin, l'amplitude de diffusion méson π -méson π possède en effet une structure analytique simple et une symétrie de croisement maximale.

Expérimentalement, la diffusion pion-pion à basse énergie est principalement étudiée par l'intermédiaire du processus de production d'un pion dans l'interaction pion-nucléon (1,2). En premier lieu, cette méthode nécessite un prolongement analytique des amplitudes de production de la région physique πN sur la couche de masse du pion virtuel échangé. Cette détermination indirecte entache les résultats d'une certaine imprécision. D'autre part, l'onde S (I=0) est extraite de l'interférence entre les ondes S et P, ce qui ne permet pas de

distinguer entre les deux solutions $\delta_0^{I=0}$ et $\delta_0'^{I=0} = \frac{\pi}{2} - \delta_0^{I=0} + \delta_1^{I=1}$, du moins pour des énergies égales ou supérieures à 750 MeV. Cette ambiguité est couramment appelée ambiguité "up-down". Toutefois, des expériences récentes avec les réactions $\pi^+ p \rightarrow \pi^+ \pi^- \Delta^{++}$ (3) et $\pi^- p \rightarrow \pi^\circ \pi^\circ n$ (4), qui éliminent cette interférence entre les ondes S et P, semblent permettre de lever cette ambiguité et de trancher en faveur de la solution "down" au-dessus de 750 MeV. La désintégration $K_{\ell 4}$ fournit également des renseignements sur la différence $\delta_0^\circ - \delta_1^1$ des déphasages des ondes S(I=0) et P(I=1) tout près du seuil $s=4\mu^2$, avec cependant des erreurs assez grandes (5).
Par contre un certain nombre de traits saillants émergent malgré ces incertitudes. L'existence de la résonance ρ dans l'onde P est le fait le mieux établi. L'onde S(I=0) correspond à un déphasage positif et fort. Le déphasage de l'onde S(I=2) est petit et négatif (6).

Les calculs théoriques de la diffusion pion-pion ont été abordés de diverses façons (7)

La première étude de cette interaction fut développée par Chew et Mandelstam (8) dans le cadre du postulat de l'analyticité maximale (représentation de Mandelstam). Lovelace (9) a démontré que leurs équations n'avaient pas de solutions physiques acceptables.

Dans la même optique, la méthode du Bootstrap (10) consiste à engendrer les amplitudes pion-pion de manière self-consistante, la voie directe étant déterminée à partir des échanges de particules dans les voies croisées et vice-versa. Les premières tentatives, basées sur l'échange du ρ (11), n'ont pas donné de bons résultats. Ces travaux ont été poursuivis en considérant soit l'échange de la trajectoire de Regge du méson ρ (12), soit l'échange des deux trajectoires de Regge du méson ρ et du Pomeron (13). Ce dernier cas fournit les meilleurs résultats. La largeur de la résonance ρ est correctement calculée, les longueurs de diffusion a_o^o et a_o^2 des deux ondes S sont petites ($a_o^o \sim 0{,}15$ et $a_o^2 \sim -0{,}04$) et le déphasage de l'onde S(I=2) est compa-

tible avec les résultats expérimentaux. Mais la résonance ε dans l'onde S(I=0) et la résonance f_o dans l'onde D(I=0) ne sont pas engendrées.

Récemment, Atkinson (14) a obtenu un résultat très important, à savoir que les équations provenant de la représentation de Mandelstam, de l'unitarité et de la symétrie de croisement possèdent des solutions qui dépendent d'une fonction arbitraire de deux variables. Sa démonstration permet théoriquement de construire de telles amplitudes moyennant certaines hypothèses supplémentaires sur cette fonction arbitraire.

La technique des algèbres de courant (15) consiste à fixer les paramètres des amplitudes sur une région située hors de la couche de masse. En particulier, les longueurs de diffusion des ondes S ainsi déterminées sont petites ($a_o^o \sim 0{,}2$, $a_o^2 \sim -0{,}04$). Après unitarisation et imposition de la symétrie de croisement, les amplitudes peuvent être prolongées sur la région physique et sont alors compatibles avec l'existence des résonances ρ et ε (16).

Les modèles duals simples (17) ou unitaires (18) relient les paramètres de haute énergie à ceux de basse énergie et permettent de les calculer par auto-consistance. La difficulté est ici de conserver la symétrie de croisement après unitarisation (18). Les ondes S et P obtenues sont en accord avec les résultats expérimentaux.

Les modèles lagrangiens (19) ont été principalement utilisés dans l'approximation de Padé (20). Ces approximants de Padé sont unitaires mais violent légèrement les relations de Roskies et les inégalités de Martin qui, nous le verrons, sont des conditions nécessaires de symétrie de croisement. Les deux modèles, dans lesquels les forces proviennent du méson ρ (21) (ou ε (22)) conduisent à des amplitudes de basse énergie acceptables. Les résonances ε (ou ρ) et f_o

sont engendrées de manière dynamique. Le modèle d'échange du ρ en particulier, où le ρ apparait comme une particule élémentaire et où les constantes de soustraction des ondes S sont fixées au moyen de la règle de self-consistance d'Adler, donne des ondes S en accord avec l'expérience, des longueurs de diffusion $a_o^o \sim 0,17$ et $a_o^2 \sim -0,06$ proches des valeurs des algèbres de courant et une résonance ε large avec $m_\varepsilon \sim 450$ MeV et $\Gamma_\varepsilon \sim 500$ MeV.

Enfin la dernière approche, qui est celle de ce travail, est basée sur l'exploitation intensive de l'analyticité, de l'unitarité et de la symétrie de croisement dans le cadre de la théorie axiomatique des champs. L'idée est ici que la combinaison de ces trois propriétés générales avec les faits expérimentaux les mieux établis, tels que la présence du méson ρ dans l'onde P et l'absence de résonances dans l'onde S(I=2) au-dessous de 1 GeV, doit permettre de contraindre suffisamment les amplitudes et de prédire les déphasages pion-pion à basse énergie. Cette méthode a l'avantage de s'appuyer sur des résultats rigoureusement démontrés en théorie axiomatique des champs. Ces résultats ont été établis en grande partie par J. Bros, H. Epstein et V. Glaser (23,24), par H. Lehmann (25) et par A. Martin (26). Ils portent sur :

- la symétrie de croisement
- le domaine d'analyticité et l'existence de relations de dispersion à t fixé pour $-28\mu^2 < t < 4\mu^2$
- la convergence du développement en ondes partielles de l'amplitude et de sa partie absorptive dans les ellipses de Lehmann-Martin contenant le disque $|t| < 4\mu^2$
- l'établissement de bornes asymptotiques et, en particulier, de la borne de Froissart.
- l'existence de deux soustractions au plus dans les relations de dispersion
- le domaine d'analyticité des ondes partielles.

Comme la condition d'unitarité élastique peut être introduite exactement et simplement au niveau des ondes partielles, il est intéressant de pouvoir imposer la symétrie de croisement directement sur ces ondes partielles. Plusieurs méthodes rigoureuses peuvent être utilisées à cet effet.

En combinant l'analyticité, la symétrie de croisement et la positivité des parties absorptives, A. Martin (27) a établi un grand nombre d'inégalités ponctuelles entre amplitudes partielles sur la région non-physique $0 < s < 4\mu^2$.

R. Roskies (28) a dérivé, à partir des travaux de A.P. Balachandran et J. Nuyts (29), des relations intégrales de croisement sur la région non-physique, dont chacune ne fait intervenir qu'un nombre fini d'ondes partielles. L'ensemble de ces relations forme un système de conditions nécessaires et suffisantes de croisement. Le seul inconvénient est qu'elles ne contraignent les ondes partielles que sur la région non-physique.
Il est particulièrement utile de pouvoir imposer la symétrie de croisement sur la région physique. S.M. Roy (30) a montré que cela pouvait être fait au moyen des relations de dispersion à t fixé, deux fois soustraites, dans lesquelles la symétrie de croisement est utilisée pour exprimer les fonctions de soustraction en fonction des longueurs de diffusion des ondes S et des parties absorptives.

Dans le travail présenté dans cette thèse, nous avons exploré l'effet des contraintes dues à l'analyticité "axiomatique", l'unitarité et la symétrie de croisement de deux manières différentes.
Dans la première partie, nous travaillons directement avec les amplitudes S et P unitaires élastiques, auxquelles nous adjoignons les ondes D dans la représentation de Froissart-Gribov. Nous utilisons l'unitarité, le comportement normal au seuil et la symétrie de croisement pour calculer la partie proche de la coupure de gauche de ces amplitudes partielles. Puis nous leur imposons la symétrie de croisement sur la région non-physique à l'aide des quinze équations de Roskies

qui sont à notre disposition. Enfin, nous les prolongeons sur la région physique pour obtenir des ensembles de déphasages S et P (31). Toutefois, l'extrapolation de tels modèles loin au-dessus du seuil $s = 4\mu^2$ n'est pas sans poser de problèmes.

Dans la deuxième partie, nous avons repris et étendu cette étude au domaine $0 < s < 40\ \mu^2$ à l'aide de nouvelles relations de croisement, valables sur la région physique, relations découvertes postérieurement à notre premier travail. Nous avons utilisé ces relations dans l'approximation où les parties absorptives de haute énergie sont représentées par un modèle de Regge et où les parties absorptives de basse énergie sont saturées par les ondes S et P. Les parties réelles des ondes S et P s'expriment alors comme des fonctionnelles singulières des parties imaginaires de ces mêmes ondes partielles. Jointes à la condition d'unitarité élastique, ces relations forment un système d'équations dont les solutions sont compatibles avec les propriétés générales de la matrice S et l'existence du méson ρ .

Nous nous sommes tout d'abord servis de ces équations pour tester sur la région physique les propriétés de symétrie d'un certain nombre de modèles unitaires d'ondes S et P de la diffusion $\pi\pi$.

Nous avons ensuite étudié plus systématiquement les solutions de ces équations en paramétrisant les parties absorptives des ondes S et P de façon à tenir compte des propriétés analytiques connues de ces ondes partielles. Cette méthode a l'avantage de permettre un contrôle plus étroit des solutions sur la région non-physique. Nous avons imposé à nos amplitudes la même structure analytique que celle de notre modèle précédent, caractérisé par la présence d'un zéro dans les deux ondes S(I=0,2) pour $s>0$ et l'existence d'un état lié virtuel dans l'onde S(I=2) (32)

Ces deux approches, qui traitent les mêmes ingrédients de base de manière très différente, donnent des résultats similaires, au moins à basse énergie.

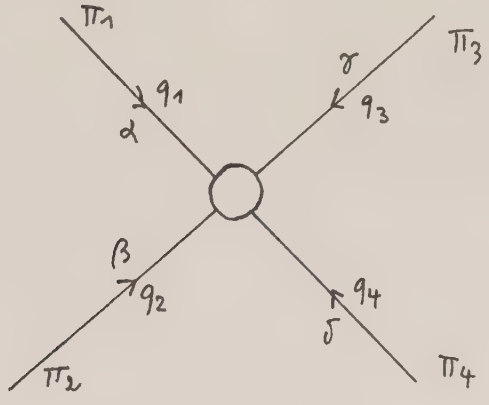
Dans le chapitre II, nous rappelons, pour mémoire, les propriétés de la cinématique de la diffusion pion-pion, ce qui nous permet également de fixer nos notations. Nous donnons dans le chapitre III les propriétés d'analyticité et de symétrie des amplitudes qui sont à la base de ce travail. Le chapitre IV est consacré à l'étude des petites ondes S, P et D de la diffusion pion-pion à l'aide des relations de croisement sur la région non-physique et à l'analyse des résultats ainsi obtenus. Cette étude est poursuivie dans le chapitre V où nous utilisons les relations de croisement sur la région physique. Une discussion comparative des résultats terminera ce dernier chapitre.

Chapitre II

Cinématique de la diffusion pion-pion

I - Définitions

La diffusion élastique $\pi\pi \to \pi\pi$, représentée par le diagramme ci-dessous, met en jeu quatre pions de quadri-impulsions q_i et d'indice d'isospin $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, dont la masse sera prise égale à l'unité ($m_\pi = \mu = 1$)



Par symétrie de croisement, un tel schéma représente, en fait, trois processus distincts qui définissent trois canaux I, II, III :

I $\quad \pi_1 + \pi_2 \to \bar{\pi}_3 + \bar{\pi}_4$

II $\quad \pi_1 + \pi_3 \to \bar{\pi}_2 + \bar{\pi}_4$

III $\quad \pi_1 + \pi_4 \to \bar{\pi}_2 + \bar{\pi}_3$

Les quatre quadri-impulsions sont liées sur la couche de masse par la conservation de l'énergie-impulsion

$$q_1^2 = q_2^2 = q_3^2 = q_4^2 = \mu^2 = 1 \qquad (II.1)$$

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 0 \qquad (II.2)$$

Les amplitudes sont fonction des trois invariants scalaires de Mandelstam

$$\begin{aligned} s &= (q_1 + q_2)^2 \\ t &= (q_1 + q_3)^2 \\ u &= (q_1 + q_4)^2 \end{aligned} \qquad (II.3)$$

liés par la relation

$$s + t + u = 4\mu^2 \qquad (II.4)$$

qui est une conséquence de (II.1) et (II.2)

Dans le canal I ou "canal s", la variable s est égale au carré de l'énergie dans le système du centre de masse, les variables t et u représentent les carrés des transferts d'impulsion. Plus précisément, si nous définissons q, l'impulsion, et θ l'angle de diffusion dans le centre de masse, les trois invariants s, t, u s'écrivent :

$$\begin{aligned} s &= 4(q^2 + \mu^2) \\ t &= -2q^2(1 - \cos\theta) \\ u &= -2q^2(1 + \cos\theta) \end{aligned} \qquad (II.5)$$

De même, les canaux II ou "canal t" et III ou "canal u" sont ceux dans lesquels t et u sont respectivement le carré de l'énergie dans le système du centre de masse.

2 - Propriétés de la matrice de diffusion -

La matrice de transition T est liée à la matrice S par la relation

$$\langle f|S|i\rangle = \delta_{if} - i(2\pi)^4 \delta^4(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) \langle f|T|i\rangle$$

La matrice invariante de Feynmann F (q_1, q_2, q_3, q_4) est alors définie par

$$\langle f|T|i\rangle = \frac{1}{(16\,\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4)^{1/2}}\; F(q_1,q_2,q_3,q_4)$$

où les ω_i sont les énergies des quatre pions.
L'amplitude F(s,t,u) que nous utiliserons est, à un facteur près, cette amplitude invariante de Feynamnn. Elle est normalisée de telle sorte que :

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{16\pi}{s(s-4)}\,|F(s,t)|^2 \qquad (II.6)$$

$$\sigma_{TOT} = \frac{16\pi}{\sqrt{s(s-4)}}\;\mathrm{Im}\;F(s,0)$$

a- Loi de substitution et symétrie de croisement

J. Bros, H. Epstein et V. Glaser (23) ont montré que les trois amplitudes qui décrivent les trois canaux I, II et III, sont données par les valeurs au bord des coupures d'une même fonction analytique quand s,t,u prennent des valeurs physiquement possibles dans ce canal. Par exemple, l'amplitude $F^s(s,t,u)$ qui décrit le canal s est telle que

$$F^s(s,t,u) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} F(s+i\varepsilon,t,u) \qquad \begin{matrix} s>4\mu^2 \\ t<0 \end{matrix}$$

D'autre part, ces trois canaux décrivent le même processus de diffusion $\pi\pi\to\pi\pi$ où les trois particules π^+, π^- et π^0 forment un triplet de spin isostopique. π^+ et π^- sont conjugués de charge tandis que π^0 est sa propre antiparticule. L'invariance de spin isotopique nous conduit à développer cette amplitude unique F(s,t,u) sur les invariants d'isospin :

$$F(s,t,u) = A(s,t,u)\,\delta_{\alpha\beta}\,\delta_{\gamma\delta} + B(s,t,u)\,\delta_{\alpha\gamma}\,\delta_{\beta\delta} + C(s,t,u)\,\delta_{\alpha\delta}\,\delta_{\beta\gamma}$$

où $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ sont les indices de spin isotopique des pions $(\alpha,\beta,\gamma,\delta = 1,2,3)$ et A(s,t,u), B(s,t,u), C(s,t,u) des fonctions analytiques. Dans un canal donné, les amplitudes $F^I(s,t,u)$ de spin isotopique pur I sont des combinaisons linéaires de A, B et C. Dans le canal s, nous obtenons

$$F^{I=0}(s,t,u) = 3A + B + C$$

$$F^{I=1}(s,t,u) = B - C \qquad (II.7)$$

$$F^{I=2}(s,t,u) = B + C$$

Les amplitudes correspondantes dans les autres canaux se déduisent des expressions (II.7) par permutations circulaires sur A, B et C. Ces amplitudes $F^I(s,t,u)$ dans les différents canaux, obtenues à partir des trois mêmes fonctions A, B et C, sont reliées par les relations de croisement

$$F^I(s,t,u) = (-1)^I F^I(s,u,t)$$

$$F^I(s,t,u) = C^I_J \; F^J(t,s,u) \qquad (II.8)$$

$$F^I(s,t,u) = \bar{C}^I_J \; F^J(u,t,s)$$

où $F^I(x,y,z)$ est l'amplitude d'isospin I dans le canal où x est le carré de l'énergie et y le carré du moment de transfert.
La première relation (II.8) est une conséquence de la symétrie de Bose-Einstein. Les C^I_J et $\bar{C}^I_J$ sont les coefficients des matrices de croisement

$$\left\{C^I_J\right\} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 2 & 3 & -5 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \left\{\bar{C}^I_J\right\} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -6 & 10 \\ -2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad (II.9)$$

Nous pouvons enfin définir les combinaisons linéaires $M^+(s,t,u)$ et $M^-(s,t,u)$, respectivement symétriques et anti-symétriques sous l'échange $s \leftrightarrow u$:

$$M_1^+(s,t,u) = A + B + C = \frac{1}{3}\left(F^0 + 2F^2\right)$$

$$M_2^+(s,t,u) = A - 2B + C = \frac{1}{6}\left(2F^0 - 5F^2 - 9F^1\right) \qquad \text{(II.10)}$$

$$M^-(s,t,u) = A - C = \frac{1}{6}\left(2F^0 - 5F^2 + 3F^1\right)$$

La combinaison neutre

$$F^N = \frac{1}{3}\left(F^0 + 2F^2\right) \qquad \text{(II.11)}$$

est d'ailleurs totalement symétrique par rapport aux trois variables s,t,u. Les combinaisons $F^A = 2F^O - 5F^2$ et F^1 sont conservées sous l'échange s,u.

$$F^A(s,t,u) = -\frac{1}{2}F^A(u,t,s) - \frac{9}{2}F^1(u,t,s)$$

$$F^1(s,t,u) = -\frac{1}{6}F^A(u,t,s) + \frac{1}{2}F^1(u,t,s) \qquad \text{(II.12)}$$

b - Développement en ondes partielles et unitarité

Les amplitudes $F^I(s,t,u)$, ainsi que leurs parties absorptives $A^I(s,t,u)$ peuvent être développées sur les polynômes de Legendre

$$F^I(s,t,u) = \sum_\ell (2\ell+1) f_\ell^I(s) P_\ell(\cos\theta)$$

$$A^I(s,t,u) = \sum_\ell (2\ell+1) \operatorname{Im} f_\ell^I(s) P_\ell(\cos\theta) \qquad \text{(II.13)}$$

avec $\cos\theta = 1 + \frac{2t}{s-4}$

La somme se fait sur les ℓ tels que $\ell + I$ soit pair, à cause de la symétrie t - u.

Les relations inverses sont :

$$f_\ell^I(s) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} d(\cos\theta)\, P_\ell(\cos\theta)\, F^I(s,\cos\theta) \qquad (II.14)$$

soit encore, en fonction de la variable t :

$$f_\ell^I(s) = \frac{2}{4-s}\int_0^{\frac{4-s}{2}} dt\; P_\ell\left(1+\frac{2t}{s-4}\right) F^I(s,t) \qquad (II.15)$$

La relation d'unitarité sur les ondes partielles s'écrit

$$0 \leq \rho(s)\,\left|f_\ell^I(s)\right|^2 \leq \mathrm{Im}\, f_\ell^I(s) \leq 1 \qquad (II.16)$$

avec

$$\rho(s) = \sqrt{\frac{s-4}{s}}$$

Au dessous du premier seuil inélastique, nous avons l'unitarité élastique :

$$\mathrm{Im}\, f_\ell^I(s) = \rho(s)\,\left|f_\ell^I(s)\right|^2 \qquad (II.17)$$

Ce qui implique la paramètrisation :

$$f_\ell^I(s) = \frac{e^{i\delta_\ell^I}\,\sin\delta_\ell^I}{\rho(s)}$$

où δ_ℓ^I est le déphasage réel de l'amplitude partielle. Les résultats expérimentaux montrent d'ailleurs que l'ouverture du canal $\pi\pi \to 4\pi$ a des effets négligeables bien au-delà de s=16, et que l'inélasticité ne devient importante qu'au seuil $K\bar{K}$(s = 50).

Les longueurs de diffusion au seuil s=4 sont définies par

$$a_\ell^I = \lim_{s\to 4}\left\{\frac{f_\ell^I(s)}{\left(\frac{s-4}{4}\right)^\ell}\right\} \qquad (II.18)$$

Chapitre III

Propriétés d'analyticité et de symétrie de croisement des amplitudes.

1 - Propriétés analytiques des amplitudes

Nous laissons de côté, pour l'instant, l'indice d'isospin qui n'est pas utile pour notre propos. Les premiers résultats énumérés ci-dessous ont été établis principalement par Goldberger (33), Symanzik (34), et Bogoliubov (35), à partir de la théorie des champs.

(i) pour $-t_o < t < 0$ $(t_o > 0)$, $F(s,t)$ est analytique en s dans le plan coupé de $-\infty$ à $-t$ et de 4 à $+\infty$

(ii) $F(s,t)$ est réelle, c'est à dire que $F^*(s^*,t)=F(s,t)$

(iii) $F(s,t)$ est bornée par un polynome en s

Ces trois propriétés permettent d'écrire pour $F(s,t)$ une relation de dispersion à t fixé dans l'intervalle $(-t_o,0)$.

L'analyticité dans la variable t ou $\cos\theta$ a été étudiée par Lehmann (25) qui a établi que, pour tout s physique $s > 4$, l'amplitude $F(s, \cos\theta)$ et sa partie absorptive $A(s, \cos\theta)$ sont analytiques en $\cos\theta$ dans des ellipses E_1 et E_2 homofocales, de foyers -1 et +1 et de demi- grands axes $b_1 = \left[1 + \frac{64}{q^2 s}\right]^{\frac{1}{2}}$ et $b_2 = 2b_1^2 - 1$ respectivement. En particulier, les développements en ondes partielles (II.13) convergent dans ces ellipses, qui ont l'inconvénient de dépendre de l'énergie et de se réduire au segment (-1, +1) quand s tend vers l'infini.

A. Martin (36) a élargi substanciellement ces domaines d'analyticité, et, en particulier, ces ellipses. Il s'est appuyé pour cela sur les deux propriétés suivantes.

a) Un résultat dû à Bros, Epstein et Glaser (24) selon lequel tout point (s_o,t_o), s_o étant en dehors des coupures, est le centre d'un voisinage dans lequel il y a analyticité, à la fois en s et en t.

b) La positivité des parties absoptives et de leurs dérivées sur la région $s > 4$, $-t < 0$

$A(s,t) > 0$ pour $s > 4$, $t > 0$

et les relations

$$\left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^m A(s,\cos\theta)\Big|_{\cos\theta=1} \geqslant 0$$

$$\left|\left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^m A(s,\cos\theta)\right|_{-1<\cos\theta<1} < \left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^m A(s,\cos\theta)\Big|_{\cos\theta=1}$$

Ces inégalités sont une conséquence de la convergence du développement de $A(s,\cos\theta)$ en ondes partielles dans l'ellipse de Lehmann, de la condition d'unitarité $\mathrm{Im}\, f_\ell^I(s) \geqslant 0$ et des propriétés des polynômes de Legendre.

A. Martin a démontré que :

i) Si F(s,t) est analytique en s pour t fixé $-t_o < t < 0$, alors F(s,t) est analytique quand t appartient à un domaine D(t) qui contient le segment $-28 < t < 4$

ii) Pour $s \geqslant 4$, F(s,t) est analytique en t dans des ellipses de foyer t=0 et t=4 - s et qui contiennent toutes le segment $-28 < t < 4$ et le disque $|t| < 4$

iii) Les amplitudes partielles sont analytiques dans un domaine qui contient le demi-axe $-28, +\infty$ et coupé de -28 à 0 et de 4 à $+\infty$.

iv) Il est possible de retrouver la borne de Froissart initialement démontrée dans le cadre de la représentation de Mandelstam

$$|F(s,t=0)| < C\, s \left(\log \frac{s}{s_0}\right)^2$$

Une conséquence des résultats précédents est qu'on peut écrire pour F(s,t) une relation de dispersion à t fixé avec au plus deux soustractions pour t $\in$ D(t). Par exemple pour l'amplitude neutre

$$F^{N}(s,t) = C^{N}(t) + \frac{1}{\pi}\int_{4}^{\infty} ds' \frac{A^{N}(s',t)}{s'(s'-4)}\left\{\frac{s(s-4)}{s'-s} + \frac{u(u-4)}{s'-u}\right\} \qquad (III.1)$$

Nous verrons que la fonction de soustraction $C^{N}(t)$ peut être calculée par symétrie de croisement. En projetant cette équation sur les polynômes de Legendre, nous avons une représentation des amplitudes partielles valable tant que $(4-s)/2$, la valeur minimum de t à s donné, est comprise entre -28 et 4, soit pour $-4 < s < 60$.

De même, par symétrie, quand s appartient au domaine D(s), nous pouvons écrire une relation de dispersion à s fixé analogue à (III.1), et une représentation de Froissart-Gribov des ondes partielles (ou une représentation analogue pour les ondes S et P) valable pour $-28 < s < 4$

$$f_{\ell}^{N}(s) = \frac{4}{\pi(4-s)}\int_{4}^{\infty} ds' \, A^{N}(s',s)\, Q_{\ell}\left(\frac{2s'}{4-s} - 1\right) \qquad \ell \geq 2 \qquad (III.2)$$

Cette équation (III.2), jointe à la positivité de la partie absorptive, nous montre que les ondes partielles neutres $f_{\ell}^{N}(s)$, de moment angulaire supérieur ou égal à 2, sont positives sur le segment $0 < s < 4$ Il en est de même dans le cas de l'isospin I=0, pour lequel les coefficients de croisement s-t sont tous positifs.

2 - Relations de croisement sur les ondes partielles

La symétrie de croisement est une propriété des amplitudes totales. D'autre part, l'unitarité ne peut être commodément imposée que sur les ondes partielles. Pour pallier cette difficulté, nous avons besoin d'un moyen d'imposer la symétrie de croisement directement sur

les amplitudes partielles. Trois méthodes peuvent être utilisées à cet effet.

2-1. Relations intégrales de croisement sur la région non-physique

Cette première méthode a été initialement proposée par A.P. Balachandran et J. Nuyts (29) dont les travaux contiennent toutes les idées de base. Elle a été ensuite appliquée au cas de la diffusion pion-pion par R. Roskies (28). Parallèlement, J.L. Basdevant, G. Cohen-Tannoudji et A. Morel (37) ont dérivé ces relations de manière plus simple.

Considérons une combinaison des amplitudes symétriques sous l'échange $s \leftrightarrow u$ soit $F^+(s,t,u)$. L'intégrale sur le triangle $s > 0$, $t > 0$ et $u > 0$

$$\int_0^4 ds \int_0^{4-s} dt \; (s-u)^{2N+1} t^p \, F^+(s,t,u) \qquad (III.3)$$

où $(s-u)^{2N+1} t^p$ est une fonction anti-symétrique en s et u, est identiquement nulle.

Si nous développons maintenant $F^+(s,t,u)$ en ondes partielles et intégrons en t, (III.3) conduit à la condition :

$$\int_0^4 ds \sum_{\ell=0}^{2N+1+p} C_\ell^{2N+1,p}(s) \, f_\ell(s) = 0 \qquad (III.4)$$

Cette condition est nécessaire. Mais, puisque les polynômes $(s-u)^{2N+1} t^p$ forment un ensemble complet de fonctions anti-symétriques, le système complet de conditions (III.4) est aussi suffisant.

Les contraintes de rang ℓ font intervenir les ℓ premières ondes partielles. En appliquant cette méthode aux deux combinaisons symétriques et à la combinaison anti-symétrique que l'on peut construire à partir des amplitudes pion-pion, nous obtenons ainsi deux

contraintes sur les ondes S, trois contraintes sur les ondes S et P et dix contraintes sur les ondes S, P et D.

Ces quinze conditions, développées sur les polynômes de Jacobi $J_m^{2\ell+1,0}\left(\frac{s}{2}-1\right)$, qui sont orthogonaux sur l'intervalle $0 < s < 4$, s'écrivent

$$R_i = \int_0^4 ds(4-s) \sum_{\ell=0}^{2} \left\{ (4-s)^\ell \; J_{m-\ell}^{2\ell+1,0}\left(\frac{s}{2}-1\right) \sum_{I=0}^{2} \alpha_{\ell,m}^{I} \; f_\ell^I(s) \right\} = 0 \qquad \text{(III.5)}$$

où les coefficients $\alpha_{\ell,m}^{I}$ sont donnés dans le tableau I.

2-2. Inégalités de Martin sur la région non-physique

Les relations de Roskies sont très commodes, car elles permettent de ne travailler qu'avec les ondes les plus basses. Mais, ce faisant, elles ignorent les informations qui peuvent provenir des ondes partielles de moment angulaire plus élevé. Ces informations supplémentaires peuvent être prises en compte, grâce à la positivité des parties absorptives.

Nous avons vu, par exemple, que, dans le cas de la combinaison neutre et de l'isospin I=0, cette propriété, jointe à la représentation de Froissart-Gribov, permet de conclure que les ondes partielles de moment angulaire $\ell \geqslant 2$ sont positives sur l'intervalle (0,4). Si le coefficient d'une de ces amplitudes partielles dans une relation de Roskies de rang supérieur à $\ell = 2$ a un signe déterminé, cela permet de tirer de cette relation une inégalité que nous pouvons adjoindre aux quinze contraintes déjà citées.

Un grand nombre d'inégalités ponctuelles entre ondes partielles sur l'intervalle (0,4) ont été également établies par A. Martin (38) dans le cas neutre et par Auberson, Brander, Mahoux et Martin (39) dans le cas chargé.

Indiquons ici brièvement la manière d'obtenir systématiquement

de telles contraintes. Développons l'amplitude neutre $F^N(s,t)$ sur les ondes partielles du canal s sous la forme :

$$F^N(s,t) = \sum_{\ell=0}^{L-2} (2\ell+1)\, f_\ell^N(s)\, P_\ell(\cos\theta_s) + R_L^N(s,\cos\theta_s)$$

où L est un entier arbitraire

Le reste R_L peut s'écrire :

$$R_L^N = \frac{2L}{\pi} \int_{z_0}^{\infty} dz \left\{ \frac{z\, Q_{L-1}(z)\, P_L(\cos\theta) - \cos\theta\, P_{L-1}(\cos\theta)\, Q_L(z)}{z^2 - \cos^2\theta} \right\} A^N(t',s) \qquad (III.6)$$

où $z = \frac{2t'}{4-s} - 1$ et $A^N(t',s)$ est la partie absorptive, positive, de l'amplitude $F(s,t)$ dans le canal t.

On peut déterminer dans le triangle $s > 0$, $t > 0$, $u > 0$, des zones dans lesquelles la quantité entre parenthèses dans (III.6) et donc R_L^N ont un signe défini.

Le même raisonnement peut être fait avec le développement de $F(s,t)$ dans le canal t :

$$F^N(s,t) = \sum_{\ell=0}^{L'-2} (2\ell+1)\, f_\ell^N(t)\, P_\ell(\cos\theta_t) + R_{L'}^N(t,\cos\theta_t)$$

où L' est également un entier arbitraire.

Par comparaison entre ces deux expressions de $F^N(s,t)$, nous obtiendrons des inégalités ne portant que sur un nombre fini d'ondes partielles, chaque fois que nous pourrons trouver des valeurs de s et t telles que les deux restes R_L et $R_{L'}$ soient de signes contraires, ou que la différence $R_L - R_L$ ait un signe connu.

Cette méthode peut être étendue au cas chargé. Nous donnons, dans les tableaux (II.a) et (III.a), les inégalités entre les ondes S et D neutres et, dans les tableaux (IV.a) et (V.a) les inégalités entre les ondes S et P du cas chargé.

G. Auberson (40) a également établi un certain nombre d'inégalités

entre les ondes S et P et leurs dérivées. La plus contraignante porte sur l'onde S neutre $f_o^N(s)$, définie par l'équation (II.11).

$$\frac{d}{ds} f_0^N(0) < -\frac{1}{4}\left\{2 f_0^N(4) - f_0^N(2) - f_0^N(0)\right\} \qquad (III.7)$$

Il existe enfin des inégalités importantes qui portent sur l'onde S neutre et sa dérivée, et qui fixent les grandes lignes de cette amplitude sur (0,4) :

$$\begin{aligned}
&(i)\quad f_0^N(0) < f_0^N(4) \\
&(ii)\quad \frac{d}{ds} f_0^N(s) > 0 \qquad 1,697 < s < 4 \\
&(iii)\quad \frac{d}{ds} f_0^N(s) < 0 \qquad 0 < s < 1,127 \\
&(iv)\quad \frac{d^2}{ds^2} f_0^N(s) > 0 \qquad 0 < s < 1,7
\end{aligned} \qquad (III.8)$$

Les inégalités (i) et (ii) sont dues à Martin (41), (iii) à Auberson (40) et (iv) à Common (42).

2-3. Relations intégrales de croisement sur la région physique.

Les contraintes discutées dans les paragraphes (2-1) et (2-2) ci-dessus ont l'inconvénient de n'agir que sur la région non-physique. Elles ne peuvent donc être utilisées que par l'intermédiaire d'un modèle dont les paramètres sont fixés sur l'intervalle (0,4) et qui est ensuite prolongé sur la région physique, avec tous les aléas que comporte ce genre de prolongement.

Il est donc particulièrement utile de pouvoir imposer la symétrie de croisement, directement sur la région physique. La méthode, très

simple, consiste à utiliser les relations de dispersion à t fixé, deux fois soustraites, que nous avons déjà signalées (III.1). Ces équations étaient déjà utilisées depuis longtemps dans l'étude de l'interaction pion-nucléon (43). Roy (30) a eu le premier l'idée de les appliquer au cas pion-pion, et leur étude a été poursuivie par Basdevant, le Guillou et Navelet (44).

La difficulté résidait en fait dans la présence de la fonction de soustraction. Roy a montré que cette fonction pouvait être réécrite en fonction des longueurs de diffusion des ondes S et des parties absorptives.

Raisonnons, par simplicité, sur l'amplitude neutre $F^N(s,t,u)$. Par symétrie s-t, nous avons

$$F^N(0,t) = F^N(t,0)$$

En substituant l'équation (III.1) dans cette dernière relation, nous obtenons

$$C^N(t) = C^N(0) + \frac{t(t-4)}{\pi}\int_4^\infty \frac{ds'}{s'(s'-4)}\left\{A^N(s',0)\left[\frac{1}{s'-t}+\frac{1}{s'+t-4}\right] - A^N(s',t)\frac{1}{s'+t-4}\right\}$$

avec

$$C^N(0) = F^N(4,0) = a_N$$

$F^N(s,t,u)$ s'écrit maintenant :

$$F^N(s,t,u) = a_N + \frac{1}{\pi}\int_4^\infty ds'\left\{\frac{s(s+t-4)}{s'(s'+t-4)}\left[\frac{1}{s'-s}+\frac{1}{s'+s+t-4}\right]A^N(s',t) + \frac{t(t-4)}{(s'-4)s'}\left[\frac{1}{s'-t}+\frac{1}{s'+t-4}\right]A^N(s',0)\right\} \qquad (III.9)$$

En développant $A^N(s,t)$ sur les ondes partielles pour $-28 < t < 4$, puis en projetant l'amplitude $F^N(s,t,u)$ sur les ondes partielles à l'aide de la relation (II.14), on obtient :

$$f_\ell^N(s) = a_N \delta_{\ell 0} + \sum_{\ell'=0}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_4^\infty ds' \, \mathrm{Im} f_{\ell'}^N(s') \; K_{\ell',\ell}^N(s',s)(2\ell'+1) \qquad \text{(III.10)}$$

avec

$$K_{\ell',\ell}^N(s',s) = \frac{2}{4-s} \int_0^{\frac{4-s}{2}} dt \left\{ \frac{s(s+t-4)}{s'(s'+t-4)} \left[\frac{1}{s'-s} + \frac{1}{s'+s+t-4} \right] P_{\ell'}\left(1+\frac{2t}{s'-4}\right) + \frac{t(t-4)}{s'(s'-4)} \left[\frac{1}{s'-t} + \frac{1}{s'+t-4} \right] \right\} P_\ell\left(1+\frac{2t}{s-4}\right) \qquad \text{(III.11)}$$

et $-4 < s < 60$

L'extension au cas chargé n'offre aucune difficulté. Cette relation et les relations analogues dans le cas chargé, font intervenir un nombre infini d'ondes partielles. Elles sont rigoureusement déduites des axiomes de la théorie quantique des champs. Cependant, elles ne possèdent pas la structure d'une relation de dispersion sur les ondes partielles et n'impliquent pas l'analyticité des amplitudes dans tout le plan complexe, puisque leur validité est restreinte au domaine $-4 < s < 60$.

L'Equation (III.10) est une condition nécessaire de croisement, mais non suffisante, puisqu'elle ne tient compte que de la symétrie s-u.

Il faut également imposer la symétrie t-u, soit par l'intermédiaire de la condition

$$F^N(s,t,u) = F^N(s,u,t)$$

soit en exigeant que les amplitudes partielles de moment angulaire impair soient identiquement nulles :

$$f_{2\ell+1}^N(s) = \frac{1}{4-s} \int_0^{4-s} dt \; P_{2\ell+1}\left(1+\frac{2t}{s-4}\right) F^N(s,t,u) = 0$$

avec $-28 < 4-s < 4$, soit $0 < s < 32$.

Ces conditions de croisement ont été étudiées par Wanders (45) et Roskies (46). Mais la contribution des ondes S et P s'élimine explicitement dans l'une et l'autre de ces relations qui ne peuvent donc servir à contraindre les amplitudes partielles S et P.

Ces équations (III.10) peuvent également être utilisées pour déterminer les ondes partielles. Si, comme l'a suggéré Roy, on se donne les longueurs de diffusion et les parties absorptives $Im\ f_\ell^I(s)$ pour $s \gtrsim 16$, alors, l'insertion des parties réelles $Re\ f_\ell^I(s)$ données par (III.10) dans la relation d'unitarité élastique fournit un système d'équations non-linéaires qui permet de calculer les parties imaginaires $Im\ f_\ell^I(s)$ pour $4 < s < 16$.

D'autre part, les noyaux $K^N_{\ell',\ell}(s',s)$ décroissent comme $1/s'^3$ ce qui signifie que les contributions de haute énergie sont très faibles à basse énergie. On peut alors couper l'intégrale dans (III.10) en deux parties :

$$f_\ell^N(s) = \delta_{\ell 0}\, a_N + \frac{1}{\pi}\int_4^{s_M} ds' \sum_{\ell'} (2\ell'+1)\, Im\, f_{\ell'}^N(s')\, K^N_{\ell',\ell}(s',s) + \frac{1}{\pi}\int_{s_M}^{\infty} ds' \sum_{\ell'} (2\ell'+1) Im f_{\ell'}^N(s')\, K^N_{\ell',\ell}(s',s) \qquad (III.12)$$

La seconde intégrale peut être calculée au moyen d'un modèle de haute énergie. Dans la première intégrale, les parties imaginaires $Im\ f_\ell^N(s')$ pour $\ell \gtrsim 2$ sont très petites et peuvent être négligées. L'équation (III.12) permet alors de tester dans quelle mesure des résultats expérimentaux ou des modèles d'amplitudes partielles S et P sont compatibles avec la symétrie de croisement. En paramètrisant les parties absorptives des ondes S et P, (III.12) peut aussi servir à construire des modèles pour ces ondes S et P. Cette technique est utilisée au chapitre V.

Chapitre IV

1 - Introduction

Nous avons vu, dans le chapitre précédent, qu'un grand nombre de contraintes sur les ondes partielles de la diffusion pion-pion ont été obtenues à partir des propriétés d'analyticité, de symétrie et de positivité des amplitudes. Certaines de ces contraintes sont suffisamment fortes pour fixer, par exemple, le profil de l'onde S neutre $f_0^I(s)$ sur l'intervalle $0 < s < 4$. Il est donc intéressant de chercher dans quelle mesure un usage intensif de toutes ces conditions peut permettre de déterminer la diffusion pion-pion, au moins dans la région des basses énergies.

Cependant, les règles de somme de Roskies, aussi bien que les inégalités de Martin, sont des relations linéaires et homogènes entre les ondes partielles et ne peuvent donc servir à calculer ces dernières de manière absolue. Il faut faire appel pour cela à la propriété d'unitarité, qui introduit des contraintes quadratiques. Il est alors effectivement possible de calculer des bornes des amplitudes pion-pion (47). Mais ces bornes sont très grandes et leur intérêt pratique est limité.

Il est alors intéressant d'aborder le problème d'un point de vue plus phénoménologique. On peut construire des modèles d'ondes partielles, dépendant d'un certain nombre de paramètres, et étudier dans quelle mesure ils sont compatibles avec l'unitarité, la symétrie de croisement, le comportement aux seuils s=0 et s=4 et quelles sont les limitations que toutes ces contraintes imposent à de telles paramétrisations. O. Piguet et G. Wanders (48) ont été les premiers à s'engager dans cette voie. Bien que ne disposant que des inégalités de Martin, ils ont pu montrer que cette méthode permettait en fait de poser d'im-

portantes restrictions sur les deux ondes S de la diffusion pion-pion. Puis l'établissement des relations intégrales de croisement sur la région non-physique a permis à divers groupes de théoriciens (49) de développer cette étude, en y incluant la présence d'une onde P phénoménologique, dans laquelle la résonance ρ est imposée avec une position et une masse donnée.

Dans ce chapitre, nous généralisons la méthode à l'ensemble des ondes S, P et D de la diffusion pion-pion, dont nous améliorons par ailleurs le comportement au seuil s=0 (31). Le seul apport phénoménologique reste la présence du méson ρ dans l'onde P. L'addition des ondes D autorise l'utilisation d'un grand nombre de contraintes supplémentaires. Dans la mesure où la donnée des ondes S ne laisse que très peu de latitude aux ondes D (38), cela nous permet, non seulement de calculer ces dernières, mais encore de contraindre un peu plus les ondes S elles-mêmes.

Les cinq amplitudes partielles seront représentées par des modèles unitaires dont les paramètres seront fixés sur la région non-physique $0 < s < 4$ au moyen des relations de croisement. Puis nous les prolongerons sur la région physique $s > 4$ pour en déduire des renseignements sur les déphasages.

2 - Etablissement de contraintes supplémentaires

Nous avons déjà vu que la combinaison de la symétrie de croisement et de la positivité permettait d'établir un grand nombre de contraintes sur les ondes partielles. Nous disposons ainsi, d'une part des relations intégrales de Roskies, répertoriées au tableau I, et, d'autre part, des inégalités de Martin sur l'onde S neutre (Eq. III.8), entre les ondes S et D neutres (Tableaux II.a et III.A) et entre les ondes S et P (Tableaux IV.a et V.A)

D'autres relations peuvent être imposées sur les ondes partielles, soit en améliorant les contraintes précédentes, soit en tenant compte de l'unitarité complète au lieu de la simple positivité. Ces nouvelles

conditions seront utilisées surtout au seuil s=0 où les poids affectés aux ondes partielles dans les relations de Roskies sont les plus forts.

2.1 - Amélioration des contraintes de Martin

Nous commencerons par établir des inégalités sur les valeurs à l'origine des ondes partielles S et D. Ces relations nous seront très utiles pour restreindre à priori le champ de variation de certains paramètres.

Partons de la relation de croisement

$$F^I(0,4) = C^I_J\, F^J(4,0) = C^I_J\, a^J_0$$

et utilisons la représentation de Froissart-Gribov pour les ondes partielles de moment angulaire $\ell \geq 2$. Nous obtenons :

$$f^I_0(0) = C^I_J\, a^J_0 - \frac{1}{\pi}\int_4^\infty ds'\, \tilde{Q}_2\left(\frac{s'}{2}-1\right) C^I_J\, A^J(s',0)$$

avec

$$\tilde{Q}_L(z) = \sum_{\ell \geq L} (2\ell+1)\, Q_\ell(z) = \frac{z}{z^2-1} - \sum_{\ell=0}^{L-2} (2\ell+1)\, Q_\ell(z)$$

où ℓ et L sont tous les deux pairs, ainsi que I.

Les coefficients de croisement C^I_J pour l'amplitude $f^0_0(s)$ et pour la combinaison neutre $f^N_0(s)$ sont tous positifs. La positivité des parties absorptives $A^J(s',0)$ entraine alors les inégalités :

$$f^0_0(0) < \frac{a^0_0 + 5a^2_0}{3} - \frac{1}{\pi}\int_4^\infty ds'\, \tilde{Q}_2\left(\frac{s'}{2}-1\right) \mathrm{Im}\left[\frac{1}{3} f^0_0(s') + \frac{5}{3} f^2_0(s') + 3 f^1_1(s')\right] < \frac{a^0_0 + 5a^2_0}{3} \qquad (IV.1)$$

$$f^N_0(0) < \frac{a^0_0 + 2a^2_0}{3} - \frac{1}{\pi}\int_4^\infty ds'\, \tilde{Q}_2\left(\frac{s'}{2}-1\right) \mathrm{Im}\, f^N_0(s') < \frac{a^0_0 + 2a^2_0}{3} \qquad (IV.2)$$

Des inégalités similaires sont obtenues pour les ondes D :

$$f_2^a(0) < \hat{f}_2^a(0) < \frac{1}{15}\left(a_0^0 + 5a_0^2 - 3f_0^0(0)\right) \qquad (IV.3)$$

$$f_2^N(0) < \hat{f}_2^N(0) < \frac{1}{15}\left(a_0^0 + 2a_0^2 - 3f_0^N(0)\right) \qquad (IV.4)$$

avec

$$\hat{f}_2^0(0) = \frac{1}{15}\left(a_0^0 + 5a_0^2 - 3f_0^0(0)\right) - \frac{1}{5\pi}\int_4^\infty ds'\, \hat{Q}_4\left(\frac{s'}{2}-1\right) \mathrm{Im}\left[\frac{1}{3} f_0^0(s') + \frac{5}{3} f_0^2(s') + 3 f_1^1(s')\right]$$

$$\hat{f}_2^N(0) = \frac{1}{15}\left(a_0^0 + 2a_0^2 - 3f_0^N(0)\right) - \frac{1}{5\pi}\int_4^\infty ds'\, \hat{Q}_4\left(\frac{s'}{2}-1\right) \mathrm{Im}\, f_0^N(s')$$

De nombreuses inégalités peuvent être renforcées, comme (IV.1) et (IV.2), par réinjection des ondes S et P. Par exemple, l'inégalité (III.7)

$$\Delta_0^N = 4\frac{d}{ds} f_0^N(0) + 2f_0^N(4) - f_0^N(2) - f_0^N(0) < 0$$

est déduite de la relation

$$\Delta_0^N < \frac{1}{\pi}\int_4^\infty ds'\, A^N(s',2)\left\{\frac{3}{s'} - \frac{1}{s'-2} + \frac{4}{s'^2} + \log\left(1-\frac{2}{s'}\right)\right\} < 0$$

Améliorée par la forme :

$$\bar{\Delta}_0^N = \Delta_0^N - \frac{1}{\pi}\int_4^\infty ds'\, \mathrm{Im}\, f_0^N(s')\left\{\frac{3}{s'} - \frac{1}{s'-2} + \frac{4}{s'^2} + \log\left(1-\frac{2}{s'}\right)\right\} < 0 \qquad (IV.5)$$

elle fournit l'une des contraintes les plus sélectives que nous ayons à notre disposition.

2.2 - Comportement de Im $f_\ell^I(s)$ au seuil s=0

Le comportement des parties imaginaires des amplitudes partielles $f_\ell^I(s)$ à $s \lesssim 0$ se déduit du comportement de ces mêmes amplitudes partielles près du seuil s=4.

Les calculs explicites seront faits dans l'appendice A. Précisons simplement ici que, les coefficients $A^I_{\ell'}$, $B^I_{\ell'}$ et $C^I_{\ell'}$ étant définis par

$$\left|f^I_{\ell'}(s)\right|^2 = \left(a^I_{\ell'}\right)^2 + A^I_{\ell'}(s-4) + B^I_{\ell'}(s-4)^2 + C^I_{\ell'}(s-4)^3 + \mathcal{O}[(s-4)^4] \qquad (IV.6)$$

la symétrie de croisement et l'unitarité conduisent, quelque soit ℓ au développement suivant près de $s=4x^2=0$

$$Im\, f^I_\ell(s) = I^I_{\ell,3}\, x^3 + I^I_{\ell,5}\, x^5 + I^I_{\ell,7}\, x^7 + I^I_{\ell,9}\, x^9 + \mathcal{O}(x^{11}) \qquad (IV.7)$$

où les $I^I_{\ell,m}$ sont fonctions des coefficients $a^I_{\ell'}, A^I_{\ell'}, B^I_{\ell'}, C^I_{\ell'}$.
En raison du comportement normal au seuil s=4 des ondes partielles, les deux premiers coefficients $I^I_{\ell,3}$ et $I^I_{\ell,5}$ ne dépendent que des ondes S, et les deux suivants $I^I_{\ell,7}$ et $I^I_{\ell,9}$ que des ondes S et P.

Nous exigerons que nos modèles satisfassent la relation (IV.7) qui détermine la discontinuité des amplitudes partielles près de s=0 jusqu'à l'ordre $(s)^{9/2}$ inclus.

3 - Représentation des ondes S et P

Puisque, dans ce chapitre, nous voulons construire des modèles d'amplitudes valables sur la région non-physique $0 < s < 4$ et sur la région physique de basse énergie, nous devons traiter soigneusement les singularités les plus proches qui sont déterminées par l'unitarité élastique sur la coupure de droite, et par la relation (IV.7) sur la coupure de gauche.

Nous avons choisi de paramétriser les amplitudes partielles

sous la forme

$$f_\ell^I(s) = \frac{N_\ell^I(s)}{1 + N_\ell^I(s)\, D_\ell^I(s)} \qquad (IV.8)$$

où $N_\ell^I(s)$ et $D_\ell^I(s)$ sont des fonctions analytiques qui ne possèdent respectivement que la coupure de gauche ou la coupure de droite.

3.1 - Paramétrisation de la coupure de droite des ondes S et P

L'unitarité élastique des amplitudes $f_\ell^I(s)$ est imposée en définissant

$$D_\ell^I(s) = h(s) + k_\ell^I(s) \qquad (IV.9)$$

où h(s) est la fonction de Chew-Mandelstam usuelle

$$h(s) = \frac{2}{\pi}\rho(s)\,\mathrm{Log}\,\frac{\sqrt{s}+\sqrt{s-4}}{2} - i\rho(s) \qquad s \geq 4$$

$$h(s) = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{4-s}{s}}\,\mathrm{Arc\,tg}\sqrt{\frac{s}{4-s}} \qquad 0 < s < 4 \qquad (IV.10)$$

et $k_\ell^I(s)$ une fonction analytique réelle arbitraire.
Cette fonction $k_\ell^I(s)$ pourrait être déterminée par des conditions asymptotiques. Mais, comme ces conditions ne sont pas très bien connues et qu'au surplus nous ne sommes intéressés que par la région de basse énergie, nous préférons fixer $k_\ell^I(s)$ de telle sorte que le calcul de la discontinuité à gauche soit plus aisé. Plus précisément, nous choisissons la forme

$$k_\ell^I(s) = -\frac{2}{\pi} + \frac{s}{6\pi} - \frac{s^2}{12\pi\, s_\ell^I} \qquad (IV.11)$$

de telle sorte que :

(i) $D_\ell^I(s)$ se comporte comme s^2 à l'origine.

Ceci implique la relation

$$\mathrm{Im}\ N_\ell^I(s) = \mathrm{Im}\ f_\ell^I(s) + \mathcal{O}(s^3\sqrt{-s}) \qquad s \lesssim 0 \qquad (IV.12)$$

qui simplifie beaucoup le calcul de $N_\ell^I(s)$

(ii) $k_\ell^I(s)$ est stationnaire dans la région de basse énergie pour des valeurs de s_ℓ^I telles que $4 < s_\ell^I < 10$. Rappelons que $k_\ell^I(s)$ est souvent pris constant (50).

(iii) La partie réelle de $D_\ell^I(s)$ est négative sur la région physique, ce qui laisse la possibilité d'associer des résonances à des déphasages positifs, sans avoir à introduire des pôles dans $N_\ell^I(s)$. En effet, une telle résonance apparaît au point $s=s_R$ quand

$$1 + N_\ell^I(s_R)\ \mathrm{Re}\ D_\ell^I(s_R) = 0$$

Si $\mathrm{Re}\left[D_\ell^I(s_R)\right]$ est positif, $N_\ell^I(s_R)$ doit être négatif. Ceci n'est possible que si $N_\ell^I(s)$ a un pôle entre le seuil et s_R. Une telle éventualité poserait un problème de paramétrisation que nous voulons éviter. Nous prendrons donc $\mathrm{Re}\left[D_\ell^I(s)\right] < 0$ à $s > 4$.

3.2 - Paramétrisation de la discontinuité sur la coupure de gauche

La discontinuité sur la coupure de gauche est contenue dans la fonction $N_\ell^I(s)$. Dans le premier feuillet de s=0, l'unitarité implique que $N_\ell^I(s)$ est régulière à s=4. Mais il n'en est pas de même dans le second feuillet de s=0. Pour tenir compte de cette propriété, nous utiliserons la variable v introduite par Wanders (48) :

$$v = -i \log\left(\frac{\sqrt{s} + \sqrt{s-4}}{2}\right) \qquad s = 4\cos^2 v$$

qui applique conformément le feuillet physique sur la bande $0 < Re\, \nu < \frac{\pi}{2}$ La fonction $N_\ell^I(s)$ devient une fonction $N_\ell^I(\nu)$, et la régularité de $N_\ell^I(s)$ à s=4 implique que

$$N_\ell^I(\nu) = N_\ell^I(-\nu)$$

$N_\ell^I(s)$ peut donc être développée autour de s=4 suivant les puissances de ν^2.

En fait, nous n'utiliserons pas directement la variable ν^2. Pour des raisons pratiques, nous réordonnerons la série suivant les polynômes $W_{2n}(\nu^2)$, de degré n en ν^2, et definis de telle sorte que

(i) $Im\, W_{2n}(\nu^2) \simeq (\sqrt{-s})^{2n-1}$ pour $s \neq 0$

(ii) $W_{2n}(\nu^2) \simeq s-4$ pour $s \simeq 4$ $(\nu^2=0)$

Ces polynômes $W_{2n}(\nu^2)$ sont donnés dans le tableau VI ainsi que leurs développements autour de s=0 et de s=4.

Compte tenu de ces observations, les fonctions $N_\ell^I(s)$ sont paramétrisées sous la forme suivante :

$$N_0^I(s) = f_0^I(0) + \frac{s}{4}\left[\tilde{a}_0^I - f_0^I(0)\right] + s(s-4)\left\{A_0^I + A_2^I W_2 + A_4^I W_4 + A_6^I W_6 + A_8^I W_8\right\} \qquad (IV.13)$$

pour les deux ondes S d'isospin 0 et 2, et

$$N_1^1(s) = (s-4)\left\{-\frac{f_1^1(0)}{4} + \frac{s}{4}\left[a_1^1 + \frac{f_1^1(0)}{4}\right] + s(s-4)\left[A_2^1 W_2 + A_4^1 W_4 + A_6^1 W_6 + A_8^1 W_8\right]\right\} \qquad (IV.14)$$

pour l'onde P, avec

$$\tilde{a}_0^I = N_0^I(4) = \frac{a_0^I}{1 - a_0^I D_0^I(4)}$$

Les paramètres libres $f_\ell^I(0)$ et A_o^I contribuent à la partie réelle des amplitudes $f_\ell^I(s)$ à s négatif.

Les polynomes $W_{2n}(\nu^2)$, au contraire, développent une partie imaginaire à $s < 0$ et engendrent la discontinuité de $f_\ell^I(s)$ sur la coupure de gauche.

La relation (IV.7) détermine les douze coefficients A_{2n}^I (n=1, 4) en fonction des paramètres restants a_ℓ^I, $f_\ell^I(0)$, H_0^I et s_ℓ^I. Le calcul explicite est fait dans l'appendice A.

La valeur au seuil $f_1^1(0)$ et s_1^1 sont calculés en imposant à l'onde P la résonance de masse m_ρ et de largeur Γ_ρ fixée.

$$m_\rho = 765 \pm 10 \text{ MeV}$$

$$\Gamma_\rho = 130 \pm 20 \text{ MeV}$$

De plus, nous avons pris $s_o^o \simeq s_o^2 \simeq s_1^1$. Nous avons vérifié à la fin du calcul que les solutions retenues sont stables sous de faibles variations des s_o^I autour de s_1^1.

Les trois amplitudes partielles S et P sont maintenant liées et dépendent de sept paramètres libres qui sont les trois longueurs de diffusion a_ℓ^I, les deux valeurs des ondes S $f_o^I(0)$ au seuil s=0, et les deux coefficients A_o^I.

4 - Représentation des ondes D

Nous avons vu que les ondes D peuvent être écrites au moyen de la représentation de Froissart-Gribov valable pour $-28 < s < 4$

$$f_2^I(s) = \frac{4}{\pi(4-s)} \int_4^\infty ds' \; Q_2\left(\frac{2s'}{4-s} - 1\right) C_J^I \, A^J(s',s) \qquad \text{(IV.15)}$$

Dans le même intervalle $-28 < s < 4$, les parties absorptives $A^J(s',s)$

peuvent être développées sur les ondes partielles, et les ondes S et P fournissent la contribution dominante $\hat{f}_2^I(s)$

$$\hat{f}_2^I(s) = \frac{4}{\pi(4-s)} \int_4^\infty ds' \, Q_2\left(\frac{2s'}{4-s} - 1\right) \mathrm{Im}\left\{ c_0^I f_0^0(s') + c_2^I f_0^2(s') + 3 c_1^I \left(1 + \frac{2s}{s'-4}\right) f_1^1(s') \right\} \qquad (IV.16)$$

Nous paramétrisons alors les ondes D sous la forme

$$f_2^I(s) = \hat{f}_2^I(s) + \frac{4}{\pi(4-s)} \int_4^\infty ds' \, Q_2\left(\frac{2s'}{4-s} - 1\right) R^I(s') \qquad (IV.17)$$

avec

$$R^I(s') = \rho(s') \left(\frac{s'-4}{s'}\right)^4 \left\{ b_0^I + b_1^I \left(\frac{s'-4}{s'}\right) + b_2^I \left(\frac{s'-4}{s'}\right)^2 + b_3^I \left(\frac{s'-4}{s'}\right)^3 \right\}$$

$R^I(s')$ est une approximation de la contribution à $A^I(s',s)$ des ondes partielles de moment angulaire $\ell \geq 2$, valable pour s petit et qui dépend de quatre paramètres b_m^I

Les ondes D ainsi représentées n'ont pas la coupure de droite, dont l'importance est d'ailleurs faible à basse énergie à cause du comportement normal au seuil. Elles possèdent par contre une coupure de gauche sur laquelle la discontinuité près de s=0 est exacte jusqu'à l'ordre $9/2$

$$\mathrm{Im}\, f_2^I(s) = \mathrm{Im}\, \hat{f}_2^I(s) + \mathcal{O}(s^{\frac{11}{2}}) \qquad s \lesssim 0$$

5 - Résultats

Nous disposons maintenant de cinq amplitudes partielles S, P et D couplées. Les ondes S et P dépendent de 7 ou 9 paramètres, suivant

que s_o^o et s_o^2 sont pris égaux à s_1^1 ou laissés libres dans certaines limites autour de s_1^1. Les ondes D dépendent de huit paramètres. Ces quinze ou dix-sept paramètres sont fixés en imposant aux ondes S, P et D de satisfaire aux quinze relations de Roskies répertoriées au tableau I.

Pratiquement, les calculs ont été faits numériquement à l'aide du calculateur CDC 6600 de la Faculté des Sciences de Paris. Nous avons opéré en deux temps. Nous avons d'abord cherché les amplitudes S et P qui vérifient les cinq premières équations de Roskies $R_i=0$ en minimisant la fonction M_1

$$M_1 = \sum_i (R_i)^2 \qquad i = 1, 2, 3, 6, 9$$

où les R_i sont les premiers membres des équations (III.5).

Partant de ces solutions, nous avons ensuite tenté de leur adjoindre des ondes D, en minimisant la fonction M_2

$$M_2 = \sum_j (R_j)^2 \qquad j \neq i$$

Une solution est obtenue quand, quelque soit i et j, nous avons

$$|R_{i,j}| \leq 10^{-8}$$

ou en valeur relative

$$\left| \frac{R_{i,j}}{R^I_{i,j}} \right| \leq 10^{-7}$$

où R_i^I est la contribution à R_i d'une seule onde partielle

Notons ici que, dans la mesure où le système $R_i=0$ (i=1,15) n'est résolu que numériquement, il est important d'écrire ces relations R_i sur des polynomes orthogonaux (comme les polynomes de Jacobi) qui permettent une minimisation plus nette et plus rapide.

Une fois ces quinze relations de croisement vérifiées, l'ensemble des inégalités déduites de la positivité et du croisement, y compris les contraintes améliorées par réinjection des ondes S et P, sont satisfaites, à l'exception d'une seule qui est très légèrement violée (le deuxième membre de l'inégalité 5, tableau III.a).

L'ensemble de nos solutions est délimité par les valeurs suivantes des paramètres ($m_\pi = 1$)

$$a_0^0 = 0,21 \pm 0,05 \qquad f_0^0(0) = -0,10 \pm 0,03$$

$$a_0^2 = -0,09 \pm 0,02 \qquad f_0^2(0) = 0,043 \pm 0,01$$

$$a_1^1 = 0,051 \pm 0,011 \qquad f_1^1(0) = -0,049 \pm 0,011$$

avec

$$m_\varepsilon = 675 \pm 35 \text{ Mev}$$

$$\Gamma_\varepsilon = 275 \pm 25 \text{ Mev}$$

(m_ε et Γ_ε désignent les paramètres de la résonance ε calculés sur le déphasage δ_0^0)

les positions des zéros s_0 et s_2 des deux ondes S, et les longueurs de diffusion des ondes D sont respectivement

$$s_0 = 1,85 \pm 0,15 \qquad a_1^0 \simeq 0,0023$$

$$s_1 = 0,94 \pm 0,10 \qquad a_1^2 \simeq 0,00035$$

et les faisceaux des déphasages associés sont portés sur la figure 1.

Afin de faciliter et d'illustrer la discussion des résultats, nous avons également extrait de cet ensemble une solution particulière caractérisée par :

$a_0^0 = 0,22$ $\quad f_0^0(0) = -0,116$ $\quad A_0^0 = 0,007$

$a_0^2 = -0,095$ $\quad f_0^2(0) = 0,044$ $\quad A_0^2 = 0,0023$

$a_1^1 = 0,053$ $\quad f_1^1(0) = -0,050$ $\quad S_1^1 = 8,9$

$m_\xi = 686$ Mev $\quad S_0 = 1,85$ $\quad a_2^0 = 0,0023$

$\Gamma_\xi = 272$ Mev $\quad S_2 = 0,94$ $\quad a_2^2 = 0,00035$

Les déphasages correspondants sont portés sur la figure 2. L'amplitude S neutre, les amplitudes chargées S et P, et les ondes D sur l'intervalle (0,4) sont représentées sur les figures 3, 4 et 5. Enfin, les tests numériques des inégalités des tableaux II.a, III.a, IV.a et V.a sont portés dans les tableaux II.b, III.b, IV.b et V.b.

Sur la région non-physique $0 < s < 4$, les deux ondes S et l'onde P sont quasi-linéaires (fig.4). Ceci apparait clairement sur les trois relations

$$2a_0^0 - 5a_0^2 = 18\,a_1^1$$

$$2f_0^0(0) - 5f_0^2(0) = 9\,f_1^1(0)$$

$$4S_0 + 5S_2 = 12$$

qui sont exactes dans l'approximation linéaire et sont toujours vérifiées à moins de 3% près par nos solutions. Cette propriété de quasi-linéarité est liée au fait que les longueurs de diffusion a_o^o et a_o^2 sont faibles, ce qui minimise les effets de l'unitarité. Mais elle est liée aussi au fait que les ondes D et supérieures sont petites. Développons en effet l'onde S neutre, par exemple, sur les polynomes de Jacobi $J_n^{1,0}\left(\frac{s}{2}-1\right)$ de degré n en s.

$$f_0^N(s) = \sum_n a_n\, J_n^{1,0}\left(\frac{s}{2}-1\right).$$

Les relations de Roskies pour la combinaison neutre s'écrivent

$$R_m = \int_0^4 ds\,(4-s)\left\{ J_m^{1,0}\left(\frac{s}{2}-1\right) f_0^N(s) + d_m\,(4-s)^2\, J_{m-2}^{5,0}\left(\frac{s}{2}-1\right) f_2^N(s) \right\} = 0$$

et, jointes à la relation d'orthogonalité des polynomes de Jacobi

$$\int_0^4 ds\,(4-s)\left\{ (4-s)^\ell\, J_n^{2\ell+1,0}\left(\frac{s}{2}-1\right) \right\}\left\{ (4-s)^\ell\, J_{n'}^{2\ell+1,0}\left(\frac{s}{2}-1\right) \right\} = \frac{\delta_{nn'}}{2(n+\ell+1)}$$

elles impliquent que, plus l'onde D neutre est petite, plus les a_n de rang $n \geqslant 2$ sont petits, et plus le caractère linéaire de l'onde S est accusé.

Les longueurs de diffusion a_o^o et a_o^2 sont assez proches des valeurs que l'on obtient avec les algèbres de courant (15,16)

De même, l'existence dans chacune des ondes S d'un zéro situé sur la région non-physique, rejoint une prédiction bien connue de cette théorie. Cependant, ces résultats sont obtenus ici uniquement à partir de calculs sur la couche de masse, et nous n'avons, en particulier, imposé aucune contrainte telle que la condition de self-consistance d'Adler.

Sur la région physique, les déphasages δ_o^o sont groupés dans un faisceau assez fin. Ils sont tous du type up-up et présentent une résonance assez étroite qui correspond à l'existence dans le second feuillet de l'onde S d'un pôle dont la masse $m_\varepsilon \sim 700$ MeV et la largeur $\Gamma_\varepsilon \sim 270$ MeV sont stables. Ils sont en accord avec l'expérience à très basse énergie, en particulier avec les résultats de la désintégration $K_{\ell 4}$, dans la limite des erreurs expérimentales.

Les déphasages δ_o^2, négatifs, sont corrects à très basse énergie et jusqu'à 450 MeV. Au-delà, ils ont tendance soit à devenir trop négatifs, soit à présenter un zéro au dessus de 750 MeV, ce qui est incompatible avec les résultats expérimentaux.

La résonance ρ domine l'onde partielle P de telle sorte que, tous calculs faits, la paramétrisation (IV.14) redonne la forme caractéristique d'une Breit-Wigner usuelle.

6 - Discussion

Les résultats précédents peuvent être comparés à ceux qu'ont obtenus le Guillou, Morel et Navelet (49) qui ont étudié les ondes partielles S et P à partir des mêmes ingrédients de base : unitarité élastique, relations intégrales de croisement sur (0,4) et existence du méson ρ.

Sur la région non-physique, les résultats sont très semblables. Leurs amplitudes partielles sont également quasi-linéaires et possèdent des zéros situés sur l'intervalle (0,4).

Les longueurs de diffusion correspondantes

$$a_0^0 = 0,20 \pm 0,05$$

$$a_0^2 = -0,07 \pm 0,01$$

sont sensiblement les mêmes que les notres, bien que a_2 soit légèrement plus faible.

Sur la région physique, les déphasages δ_0^0 et δ_0^2 sont en accord à très basse énergie ($E < 450$ MeV), mais diffèrent plus haut, et notamment dans la région du ρ. Ils trouvent, en effet, une résonance ε beaucoup plus large que la notre. Correlativement, δ_0^0 avoisine 90° pour $s > s_\rho$

Ces différences dans la région du ρ ne sont pas surprenantes. Les modèles ont été fixés sur la région $0 < s < 4$, et leur prolongement n'est probablement valable que sur une partie de la région physique. En fait, Piguet et Wanders (51) ont montré, dans le cas des amplitudes partielles quasi-linéaires, que la combinaison des contraintes induites par la positivité, la symétrie de croisement et l'existence du méson ρ

ne restreignent significativement le comportement du déphasage que jusqu'à 450 MeV environ. Au-delà, l'allure du déphasage semble surtout un effet de la paramétrisation.

Les relations de croisement sur la région physique nous offrent précisément le moyen de contrôler ces amplitudes sur la région physique. Ce sera l'objet du chapitre suivant.

Chapitre V

1- Introduction

Au chapitre III, nous avons vu, dans le cas de l'amplitude partielle S neutre $f_0^N(s)$, comment les relations de dispersion à t fixé, deux fois soustraites, pouvaient être utilisées pour obtenir une expression intégrale des ondes partielles valable sur l'intervalle (-4, 60). Nous verrons d'ailleurs que cette expression n'est rien d'autre que le prolongement analytique de la représentation de Froissart-Gribov qui, elle, est valable sur l'intervalle (-28,4).

Dans ce chapitre, nous utiliserons ces relations pour vérifier directement sur la région physique les propriétés de symétrie de croisement du modèle précédent, et voir dans quelle mesure les prédictions concernant le domaine des basses énergies peuvent être confirmées. Nous testerons également, de la même manière, plusieurs ensembles d'amplitudes partielles S et P proposés par différents auteurs.

Puis, à l'aide de ces relations de croisement sur la région physique, nous construirons de nouveaux modèles d'ondes partielles S et P compatibles, comme auparavant, avec l'analyticité, la symétrie de croisement, l'unitarité élastique et l'existence du méson ρ .

Cette deuxième méthode possède plusieurs avantages sur la précédente. Tout d'abord, les paramètres de ces modèles sont maintenant fixés à la fois sur le domaine physique et non-physique. Nous pouvons ainsi espérer préciser le comportement des déphasages dans la région du ρ . La détermination de la coupure de gauche ne dépend plus de la paramétrisation adoptée, mais est directement inscrite dans les équations. Il est enfin facile de tenir compte du comportement asymptotique au moyen par exemple d'un modèle de Regge.

Dans le paragraphe 2, nous écrivons les relations de croisement sur la région physique et nous calculons la contribution de la région des hautes énergies aux ondes S et P. Le paragraphe 3 est consacré à l'étude des propriétés de symétrie d'un certain nombre de modèles d'ondes S et P, et, en particulier, du modèle exposé au chapitre précédent. La description de la nouvelle paramétrisation des ondes S et P adaptée à ces relations de croisement est faite au paragraphe 4. Les résultats sont exposés dans le paragraphe 5. Enfin, le paragraphe 6 est consacré à la discussion.

2- Relations de croisement sur la région physique

2.1 - Représentation des amplitudes partielles

Les calculs seront développés explicitement sur les amplitudes neutres, mais peuvent être étendus sans peine au cas chargé.

Nous travaillerons d'ailleurs sur l'ensemble

$$F^N(s,t) = F^0(s,t) + 2F^2(s,t)$$

$$F^B(s,t) = 2F^0(s,t) - 5F^2(s,t)$$

$$F^1(s,t)$$

qui par symétrie s - u se transforme plus simplement que l'ensemble F^0, F^1, F^2 (cf. Eq. II.12). Les résultats finaux se rapportent cependant aux amplitudes partielles $f_\ell^I(s)$.

Nous avons vu, au chapitre III, comment la symétrie s - t permettait de réécrire les relations de dispersion à t fixé, deux fois soustraites, uniquement en fonction des parties absorptives et des longueurs de diffusion des ondes S. Rappelons le résultat (Eq. III.9)

$$F^N(s,t) = a_N + \frac{1}{\pi}\int_4^\infty ds' \left\{ \frac{s(s+t-4)}{s'(s'+t-4)}\left[\frac{1}{s'-s} + \frac{1}{s'+s+t-4}\right] A^N(s',t) + \frac{t(t-4)}{s'(s'-4)}\left[\frac{1}{s'-t} + \frac{1}{s'+t-4}\right] A^N(s',0) \right\}$$

Par projection, nous obtenons l'onde S :

$$f_0^N(s) = a_N + \frac{1}{\pi}\int_4^\infty ds'\, K_{0,0}^N(s',s)\, \mathrm{Im}\, f_0^N(s') + \frac{1}{\pi}\int_4^\infty ds' \sum_{\ell' \geqslant 2} (2\ell'+1)\, \mathrm{Im}\, f_{\ell'}^N(s')\, K_{0,\ell'}^N(s',s) \qquad (V.1)$$

où les noyaux $K_{\ell,\ell'}^N(s',s)$ sont définis par la relation (III.11). Cette représentation de $f_o^N(s)$ est valable pour $-4 < s < 60$.

D'autre part, nous pouvons écrire pour $f_o^N(s)$ une expression analogue à la représentation de Froissart-Gribov. En effet, si dans le développement en ondes partielles

$$F^N(s,0) = f_0^N(s) + \sum_{\ell \geqslant 2} (2\ell+1)\, f_\ell^N(s)$$

nous remplaçons pour $\ell \geqslant 2$ les ondes partielles $f_\ell^N(s)$ par leur représentation de Froissart-Gribov (III.2), nous obtenons :

$$F^N(s,0) = f_0^N(s) + \frac{1}{\pi}\int_4^\infty ds'\, K_0(s',s)\, A^N(s',s) \qquad (V.2)$$

avec

$$K_0(s',s) = \frac{1}{s'} + \frac{1}{s'+s-4} - \frac{2}{4-s}\,\mathrm{Log}\left(1+\frac{s-4}{s'}\right)$$

D'autre part, la relation de dispersion vers l'avant deux fois soustraite s'écrit :

$$F^N(s,0) = a_N + \frac{1}{\pi}\int_4^\infty ds'\, K_1(s',s)\, A^N(s',0) \qquad (V.3)$$

avec

$$K_1(s',s) = \frac{s(s-4)(2s'-4)}{s'(s'-4)(s'-s)(s'+s-4)}$$

La comparaison de (V.2) et (V.3) donne :

$$f_0^N(s) = a_N + \frac{1}{\pi}\int_4^\infty ds' \left\{ K_1(s',s) A^N(s',0) - K_0(s',s) A^N(s',s) \right\} \qquad (V.4)$$

De même que la représentation de Froissart, l'expression (V.4) est valable pour $-28 < s < 4$. Elle coincide sur l'intervalle $-4 < s < 4$ avec la représentation (V.1) de $f_o^N(s)$ qui la continue analytiquement pour $s > 4$.

Les deux expressions (V.1) et (V.4) font intervenir un nombre infini d'ondes partielles. Pour les utiliser pratiquement, nous sommes obligés de faire certaines approximations. Nous nous baserons pour cela sur les deux observations suivantes :

(i) Aussi bien dans (V.1) que dans (V.4), les noyaux K(s',s) se comportent comme s'^{-3} quand s' tend vers l'infini. La contribution aux intégrales de la région des hautes énergies est numériquement très petite, et peut être approximée de manière assez frustre.

(ii) A basse énergie et jusqu'à s = 60 environ, les amplitudes de moment angulaire $\ell \geq 2$ semblent expérimentalement être très faibles et négligeables devant les ondes S et P.

Nous imposerons alors aux parties absorptives A^N, A^A et A^1 de satisfaire aux conditions suivantes :

$$\begin{aligned} A^N(s',t) &= A^N(s',0) \\ A^A(s',t) &= A^A(s',0) \qquad (V.5) \\ A^1(s',t) &= \left(1 + \frac{2t}{s'-4}\right) A^1(s',0) \end{aligned}$$

Cette approximation est consistante avec la dominance des ondes S et P à basse énergie, et avec un comportement à la Regge, dominé par l'échange d'un pomeron de trajectoire plate, à haute énergie.

Les expressions (V.1) et (V.4) deviennent maintenant identiques et donnent :

$$f_0^N(s) = a_0^0 + 2a_0^2 + \frac{1}{\pi}\int_4^\infty ds'\ K_N(s',s)\ A^N(s',0)$$

$$f_0^A(s) = (2a_0^0 - 5a_0^2)\frac{3s-4}{8} + \frac{1}{2\pi}\int_4^\infty ds'\left\{K_A^A(s',s)\ A^A(s',0) + 9K_A^1(s',s)\ A^1(s',0)\right\} \qquad (V.6)$$

$$f_1^1(s) = \left(2a_0^0 - 5a_0^2\right)\frac{s-4}{72} + \frac{1}{6\pi}\int_4^\infty ds'\left\{K_1^A(s',s)\ A^A(s',0) + 3K_1^1(s',s)\ A^1(s',0)\right\}$$

avec

$$K_N(s',s) = \frac{1}{s'-s} - \frac{2}{s'} - \frac{1}{s'-4} + \frac{4}{s-4}\,Q_0\left(1+\frac{2s'}{s-4}\right)$$

$$K_A^A(s',s) = \frac{2}{s'-s} + \frac{3s-4}{4}\left\{\frac{1}{s'} - \frac{1}{s'-4}\right\} - \frac{4}{s-4}\,Q_0\left(1+\frac{2s'}{s-4}\right)$$

$$K_A^1(s',s) = \frac{3s-4}{4s'} - \frac{3s+4}{4(s'-4)} + \frac{4}{s-4}\left(1+\frac{2s}{s'-4}\right)Q_0\left(1+\frac{2s'}{s-4}\right) \qquad (V.7)$$

$$K_1^A(s',s) = \frac{s-4}{12}\left\{\frac{1}{s'} - \frac{1}{s'-4}\right\} + \frac{4}{s-4}\,Q_1\left(1+\frac{2s'}{s-4}\right)$$

$$K_1^1(s',s) = \frac{s-4}{4s'} + \frac{4-3s}{12(s'-4)} + \frac{2}{3(s'-s)} + \frac{4}{s-4}\left(1+\frac{2s}{s'-4}\right)Q_1\left(1+\frac{2s'}{s-4}\right)$$

De plus, dans cette approximation, les amplitudes S et P $f_e^I(s)$ vérifient identiquement les relations intégrales de croisement de Roskies.

Les intégrales dans les expressions (V.6) peuvent être scindées en deux parties

$$\int_4^\infty ds' K_i(s';s) A^i(s';s) = \int_4^{s_M} ds' K_i(s';s) A^i(s';s) + \int_{s_M}^\infty ds' K_i(s';s) A^i(s';s) \qquad (V.8)$$

avec s_M=60. s_M est situé entre les résonances ρ et f_o.
Dans l'intégrale de 4 à s_M, les parties absorptives sont données par les ondes S et P et, dans la seconde intégrale, par un modèle de haute énergie que nous allons décrire maintenant.

2.2 - Contributions des hautes énergies

Nous avons choisi de représenter les amplitudes à haute énergie par un modèle de Regge. Les amplitudes d'isospin I_t dans le canal t s'écrivent :

$$F^{I_t=0}(s,t) = P(s,t) + \beta_0 \left(1 + e^{-i\pi\alpha(t)}\right) \Gamma(1-\alpha(t)) \left(\frac{s}{s_1}\right)^{\alpha(t)}$$

$$F^{I_t=2}(s,t) = 0 \qquad (V.9)$$

$$F^{I_t=1}(s,t) = \beta_1 \left(1 - e^{-i\pi\alpha(t)}\right) \Gamma(1-\alpha(t)) \left(\frac{s}{s_1}\right)^{\alpha(t)}$$

où

(i) $\alpha(t)$ est la trajectoire dégénérée associée au ρ et au f_o

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \alpha' t = 0{,}5 + 0{,}017\, t$$

(ii) s_1 est un facteur d'échelle de l'ordre de 1 GeV^2 (s_1=50)

(iii) β_0 et β_1 sont les résidus réduits, supposés indépendants de t.

Ils sont évalués en identifiant à $t=m_\rho^2$ et $t=m^2 f_0$ respectivement les amplitudes $F^{It=1}$ et $F^{It=0}$ données par les relations (V.9) aux formes de Breit-Wigner associées aux résonances ρ et f_0.
Dans le cas de It=1, cela conduit par exemple à la relation

$$\beta_1 \left[1 - e^{-i\pi\alpha(t)}\right] \Gamma(1-\alpha(t)) \left(\frac{s}{s_1}\right)^{\alpha(t)} \Big|_{t=m_\rho^2} = 3 P_1 \left(1+\frac{2s}{t-4}\right) \frac{1}{\rho(m_\rho^2)} \frac{\gamma_\rho}{m_\rho^2 - t - i\gamma_\rho} \Big|_{t=m_\rho^2}$$

où γ_ρ désigne la largeur réduite $\gamma_\rho = \frac{m_\rho \Gamma_\rho}{m_\pi^2}$

Nous en déduisons β_1 et de manière similaire β_0 :

$$\beta_1 = 3\alpha' \gamma_\rho m_\rho s_1 \left(m_\rho^2 - 4\right)^{-3/2}$$

$$\beta_0 = 15\alpha' \gamma_{f_0} m_{f_0} s_1^2 \left(m_{f_0}^2 - 4\right)^{-5/2} \qquad (V.10)$$

Numériquement, avec

$s_1 = 50\mu^2$ $\qquad$ $m_\rho = 765$ Mev $\qquad$ $m_{f_0} = 1264$ Mev

$\Gamma_\rho = 135$ Mev $\qquad$ $\Gamma_{f_0} = 150$ Mev

nous trouvons

$$\beta_0 = 1,04$$

$$\beta_1 = 0,53$$

et nous prendrons dans la suite $\beta_0 = 2\beta_1 = 1.05$

(iv) P(s,t) est la contribution associée à l'échange du pomeron. Nous n'avons d'ailleurs besoin que de Im P(s,t) et nous choisissons.

$$Im\, P(s,t) = \sigma s$$

où σ est relié à la section efficace totale asymptotique. Nous calculons σ de manière à raccorder approximativement les parties absorptives à hautes et basses énergies dans le voisinage de $s=s_M$. Cela donne une valeur de σ telle que $0.05 < \sigma < 0.11$. Nous prenons la valeur moyenne $\sigma = 0.08$ qui fournit une bonne interpolation de A^0 et A^1 entre les résonances f_o et g et une section efficace totale asymptotique de 26 mb.
Finalement, pour $s' > s_M$, nous utilisons les expressions

$$A^0_{AS}(s',0) = \frac{1}{6}\left\{2\sigma s' + 2\beta_1\sqrt{\frac{\pi s'}{s_1}}\right\}$$

$$A^1_{AS}(s',0) = \frac{1}{6}\left\{2\sigma s' - \beta_1\sqrt{\frac{\pi s'}{s_1}}\right\} \qquad (V.11)$$

$$A^2_{AS}(s',0) = \frac{1}{6}\left\{2\sigma s' - 7\beta_1\sqrt{\frac{\pi s'}{s_1}}\right\}$$

Les contributions asymptotiques correspondantes $f_\ell^{I,\infty}$ aux amplitudes partielles $f_\ell^I(s)$ sont tracées sur la figure (6). Elles sont négligeables pour $s < 20$, mais croissent ensuite rapidement. En conséquence, une détermination précise des paramètres σ et β n'est pas nécessaire tant que nous limitons l'étude des équations au domaine $s < 40\,\mu^2$ (850 MeV). Au delà, les résultats peuvent dépendre crucialement des hypothèses faites sur les paramétrisations des amplitudes pion-pion à très haute énergie. Compte tenu de nos connaissances actuelles, relativement restreintes en ce domaine, nous préférons nous limiter effectivement aux énergies inférieures à $s=40\,\mu^2$.

3- Test des propriétés de croisement de certains modèles d'ondes S et P.

Dans le paragraphe précédent, nous avons estimé les contributions asymptotiques aux amplitudes S et P. Si nous disposons maintenant d'un ensemble d'ondes S et P sur la région physique $4 < s < 60$, nous pouvons introduire leurs parties imaginaires dans les relations (V.6) et en déduire les parties réelles correspondantes, données par les relations de croisement sur la région physique. Mais l'unitarité nous permet de calculer directement ces parties réelles et de les comparer aux précédentes. C'est le test du croisement déjà proposé dans la référence (44). De plus, les relations (V.6) nous offrent le moyen de prolonger analytiquement sur l'intervalle $0 < s < 4$ n'importe quel ensemble d'ondes S et P, et de vérifier la compatibilité des déphasages associés avec les inégalités de Martin sur la région non-physique.

Nous utiliserons, en fait, l'unitarité élastique. La validité du test est donc en principe limitée à l'intervalle $4 < s < 16$, mais peut, en pratique, être étendue jusqu'à $s < 40$. Nous obtenons donc la même limitation que dans le paragraphe précédent.

Nous avons ainsi testé cinq ensembles d'ondes S et P :

1 - Le modèle exposé au chapitre précédent (31)
2 - Le modèle de Le Guillou, Morel, Navelet (49)
3 - Le modèle de Kang, Lacombe et Vinh Mau (18)
4 - L'ensemble des déphasages proposés par Morgan et Shaw (52)
5 - Les déphasages expérimentaux de Baton, Laurens et Reignier (2)

Les trois premiers modèles sont construits à partir de l'unitarité élastique, du comportement correct au seuil s=0, et de l'existence du méson ρ. Ils vérifient également les cinq relations intégrales

de croisement sur la région non-physique et les inégalités de Martin. Les paramétrisations cependant sont différentes, surtout la troisième qui est obtenue en unitarisant l'amplitude de Veneziano. Les prédictions physiques de ces trois modèles sont assez similaires.

(i) ils concluent tous trois à l'existence d'un méson ε dont la masse et la largeur sont, par ailleurs, différentes.

(ii) les ondes S(I=0) des deux premiers modèles et les ondes S (I=2) des modèles 2) et 3) sont en accord à basse énergie.

Les déphasages et les longueurs de diffusion du cas 4 sont calculés au moyen de relations de dispersion à t fixé et de leurs dérivées par rapport à t, toutes ces expressions étant évaluées vers l' avant. Ils sont indépendants de toute paramétrisation.

Dans le cas 5, nous disposons seulement des déphasages, et nous devons chercher quelles longueurs de diffusion leur associer pour que les équations (V.6) soient vérifiées.

Les résultats sont portés sur les figures 7 à 11.

Il apparait, tout d'abord, que les équations (V.6) lient étroitement les longueurs de diffusion et les déphasages, plus étroitement que ne le font les relations de dispersion habituelles ou les relations intégrales de Roskies. Cela apparait nettement, par exemple sur la figure 11 où, à côté des meilleurs résultats qui correspondent aux valeurs $a_o^o = 0{,}22$, $a_o^2 = -0{,}36$ quand δ_o^o est du type "down-down" et $a_o^o = 0{,}20$, $a_o^2 = -0{,}04$ quand δ_o^o est du type "down-up", nous avons porté les résultats obtenus avec $a_o^o = 0{,}16$ et $a_o^2 = -0{,}04$. Dans les autres cas également, une légère modification des longueurs de diffusion, qui laisse les déphasages pratiquement inchangés, peut améliorer les résultats de manière appréciable.

Il semble ensuite que dans chaque ensemble de déphasages puisse être sélectionnée une solution approximativement compatible avec les équations (V.6). En particulier, l'ambiguité "up-down" dans la détermination du déphasage δ_0^0 ne semble pas pouvoir être levée par cette méthode. Mais nous ne pouvons conclure de manière précise. Nous avons besoin pour cela d'un spectre continu de solutions. La construction et l'étude d'un tel spectre est réalisé dans le paragraphe suivant où nous construisons un modèle spécialement adapté aux relations de croisement sur la région physique.

4 - Etude des relations de croisement sur la région physique à l'aide d'un modèle.

Nous allons maintenant résoudre numériquement et de manière approchée le système d'équations (V.6), complétées par les relations d'unitarité élastique sur les ondes partielles. Pour cela, nous n'avons besoin d'une représentation des parties absorptives Im $f_e^I(s)$ que sur la région physique $4 < s < s_M$.

Cependant, les amplitudes $f_e^I(s)$ sont des fonctions analytiques qui sont définies dans une région du plan complexe s coupé de -28 à 0 et de 4 à $+\infty$ et qui sont en théorie prolongeables dans les divers feuillets induits par ces coupures. Nous connaissons un certain nombre de propriétés générales de ces fonctions $f_e^I(s)$, valables dans les feuillets physiques et non-physiques, comme par exemple, l'existence de pôles dans le second feuillet de la coupure unitaire, liés à la présence de résonances. Ces propriétés des $f_e^I(s)$ imposent certaines contraintes aux parties imaginaires $Im f_e^I(s)$

Si le système des équations de croisement et des relations d'unitarité est résolu exactement sur la région physique, les solutions ont toutes les propriétés requises par l'analyticité, l'unitarité et le croisement. Mais nous ne résolvons ce système qu'approximativement.

Les solutions obtenues, qui approchent les solutions exactes sur la région physique $4 < s < s_M$, peuvent s'en écarter de manière plus ou moins prononcée quand on les prolonge dans les autres régions du plan complexe s. Les propriétés imposées par l'analyticité et l'unitarité ne sont plus alors qu'imparfaitement vérifiées.

Nous demanderons donc à nos solutions de vérifier un certain nombre de ces propriétés. En particulier, nous les imposerons à priori dans la paramétrisation des parties absorptives Im $f_e^I(s)$, ce qui nous conduira à prolonger ces dernières dans le plan complexe s par l'intermédiaire des fonctions analytiques $G_e^I(s)$ qui seront définies au paragraphe suivant. Nous serons ainsi à même de contrôler ces solutions en dehors de la région physique et plus spécialement sur le segment $0 < s < 4$.

4.1 - Propriétés de la fonction $\rho^{-1}(s)$ Im $f_e^I(s)$

Nous définissons (53) les fonctions $G_e^I(s)$ par la relation :

$$G_e^I(s) = \frac{\left[f_e^I(s)\right]^2}{1+2i\rho(s)f_e^I(s)} = f_e^I(s)\left[f_e^I(s)\right]^{II} \qquad (V.12)$$

où $\left[f_e^I(s)\right]^{II}$ est le prolongement analytique de $f_e^I(s)$ dans le second feuillet de la coupure unitaire.

Pour $s \geq 4$, l'unitarité élastique impose

$$Im\ f_e^I(s) = \rho(s)\, G_e^I(s) \qquad (V.13)$$

Cette fonction $G_e^I(s)$ a les propriétés suivantes

(i) Elle est méromorphe dans le plan s complexe, coupé le long de l'axe réel négatif. Elle est réelle pour $s > 0$ et positive pour $s > 4$.

(ii) Elle a un comportement connu aux seuils s=0, et s=4, conséquence du comportement de $f_\ell^I(s)$ aux mêmes points :

$$G_\ell^I(s\sim 4) = \left[a_\ell^I\right]^2 \left(\frac{s-4}{4}\right)^{2\ell} + \mathcal{O}\left[(s-4)^{2\ell+1}\right]$$

$$G_\ell^I(s\sim 0) = -\frac{\sqrt{s}}{4} f_\ell^I(0) - \frac{s}{16} + \mathcal{O}(s\sqrt{s}) \qquad (V.14)$$

(iii) Elle possède des pôles qui peuvent être associés à la présence de résonances (du moins si celles-ci ne sont pas trop éloignées de l'axe réel) ou d'états liés virtuels.

Une résonance (s_R, Γ_R) induit en effet deux pôles complexes conjugués à $s_\pm = s_R \pm i\,\Gamma_R$. De tels pôles existent dans l'onde P où ils sont liés à la résonance ρ dont la masse et la largeur sont bien connues : le résidu correspondant est calculé à partir de Γ_ρ par l'intermédiaire d'une approximation de Breit-Wigner. Ils peuvent exister dans l'onde S(I=0), en liaison avec la présence du méson ε ; mais, dans ce cas, la masse m_ε, la largeur Γ_ε et le résidu correspondant sont considérés comme des paramètres libres.

Un état lié virtuel apparait à $s=s_v$ $(0 < s_v < 4)$ quand

$$f_\ell^I(s_v) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{s_v}{4-s_v}}$$

Nous savons, d'après un travail de Martin (41), que ces pôles existent dans les ondes partielles I=0, $\ell \geqslant 2$, qui sont positives sur tout l'intervalle $0 < s < 4$. En fait, le modèle précédent nous montre que l'onde S(I=2) peut également présenter une telle singularité au voisinage de s=0. En ce cas, la partie singulière de $G_\ell^I(s)$ s'écrit

$$G_v(s) = \frac{\Gamma_v}{s - s_v}$$

avec

$$\Gamma_\nu = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{s_\nu}{4-s_\nu}}\left\{\frac{4}{s_\nu^2}\sqrt{\frac{s_\nu}{4-s_\nu}} - \frac{4(4-s_\nu)}{s_\nu}\frac{d}{ds}f(s)\Big|_{s=s_\nu}\right\} \qquad (V.15)$$

(iv) $G_e^I(s)$ a un zéro double quand $f_e^I(s)$ a un zéro. De tels zéros semblent apparaitre assez systématiquement dans les deux ondes S et sont alors localisés sur l'axe réel dans la région non-physique $0 < s < 4$ ou dans la région physique proche de s=4. Nous les avons trouvés dans l'étude du modèle précédent, en accord avec les conclusions de Le Guillou, Morel et Navelet (49). Ils sont également présents dans les ondes S obtenues par la technique des algèbre de courant (15) ou par unitarisation de modèles asymptotiques (18).

Ces zéros sont de plus compatibles avec les résultats expérimentaux. En effet, ceux-ci, prolongés au-dessous du seuil s=4, indiquent que les amplitudes $f_0^0(s)$ et $f_0^2(s)$ sont, selon toute probabilité, respectivement croissantes et décroissantes sur l'intervalle $0 < s < 4$. Si les longueurs de diffusion a_0^0 et a_0^2 ne sont pas trop grandes en valeur absolue, cela entraine la présence de zéros dans les deux ondes S sur la région non-physique ou la proche région physique. Cela entraine d'ailleurs, du même coup, l'existence d'un état lié virtuel dans $f_0^2(s)$ et son absence dans $f_0^0(s)$

4.2 - Paramétrisation des fonctions $G_e^I(s)$

Parmi les propriétés des fonctions $G_e^I(s)$ énoncées ci-dessus, les deux premières, qui concernent la structure analytique de $G_e^I(s)$ (i), et son comportement au seuil s=0 et s=4 (ii), ne dépendent d'aucune

hypothèse, hormis l'extension de l'unitarité élastique jusqu'à s=50. L'existence du méson ρ et la présence des pôles associés dans $G_1^1(s)$ sont également des faits bien établis.

Il n'en est pas de même pour les deux dernières propriétés (iii) et (iv). Pour nous placer dans le cas du modèle précédent, nous nous appuierons sur les commentaires du paragraphe ci-dessus et postulerons explicitement :

(i) L'existence dans l'onde S(I=0) du méson ε , sans toutefois imposer la masse m_ε et la largeur Γ_ε qui sont mal connues.

(ii) La présence dans l'amplitude S(I=2) d'un pôle associé à un état lié virtuel et l'absence dans l'onde S(I=0) d'un tel pôle.

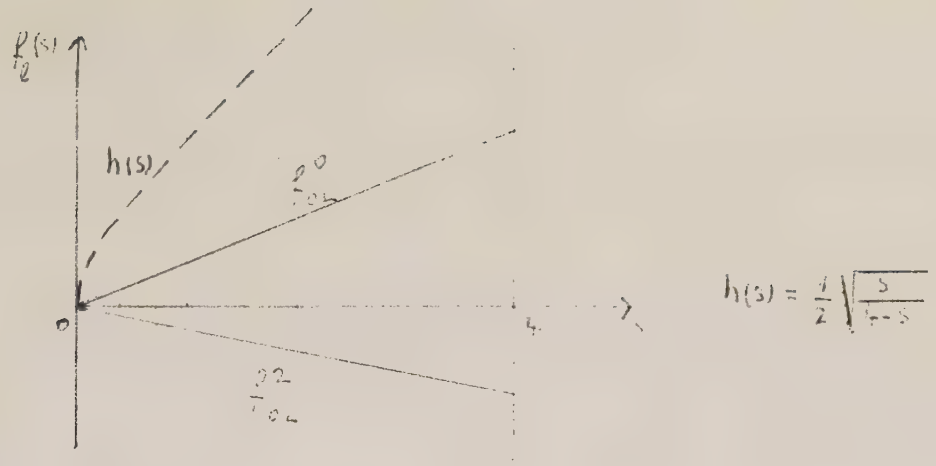
(iii) La présence dans les deux ondes S de zéros situés sur la région non-physique $0 < s < 4$ ou sur la région physique proche.

Ces deux dernières hypothèses sont d'ailleurs liées entre elles, comme nous l'avons vu plus haut. On peut montrer de manière qualitative que cela revient à imposer une borne maximale et minimale sur les longueurs de diffusion a_0^0 et a_0^2 respectivement. En effet, dans cette approche comme dans la précédente, les amplitudes $f_0^I(s)$ s'écartent peu de l'approximation linéaire et peuvent être de façon approchée représentées par des droites :

$$f_0^I(s) \sim a_0^I + b_0^I (s-4)$$

où la symétrie de croisement impose $b_0^0 = -2 b_0^2 = \frac{3 a_1^1}{2}$ avec $a_1^1 \sim 0{,}04$.

Les hypothèses (ii) et (iii) ci-dessus imposent à ces amplitudes linéaires $f_0^0(s)$ et $f_0^2(s)$ de rester respectivement au-dessous et au-dessus de deux droites limites $f_{0L}^0(s)$ et $f_{0L}^2(s)$ tracées sur la figure ci-dessous.



ces limites $f^0_{OL}(s)$ et $f^2_{OL}(s)$ définissent des valeurs limites a^0_{OL} et a^2_{OL} pour les longueurs de diffusion :

$$a^0_0 < a^0_{OL} \simeq 6\, a^1_1$$

$$a^2_0 > a^2_{OL} \simeq -3\, a^1_1$$

Finalement compte-tenu des approximations et du fait que a^1_1 n'est pas très exactement connu, on peut estimer qualitativement ces bornes :

$$a^0_0 \lesssim 0{,}30 \qquad a^2_0 \gtrsim -0{,}15$$

Après avoir factorisé les différents pôles et zéros des fonctions $G^I_\ell(s)$ nous développons la partie restante autour de s=4 en série de la variable $\tau(s)$ qui applique le plan complexe s coupé le long de l'axe réel négatif sur le disque unité :

$$\tau(s) = \frac{\sqrt{s}-2}{\sqrt{s}+2}$$

Cette variable $\tau(s)$ est liée à la variable v de Wanders, définie dans le chapitre précédent, par la relation

$$\tau = -tg^2\left(\frac{v}{2}\right)$$

Elle permet de donner à $G^I_\ell(s)$ une coupure de gauche et de tenir compte du fait que la contribution de cette coupure de gauche, régulière à s=4 dans le premier feuillet de s=0 à cause de l'unitarité, ne l'

est plus dans le second feuillet de s=0 où l'unitarité n'a plus de raison d'être.

En accord avec toutes les considérations ci-dessus, nous avons choisi la paramétrisation suivante des fonctions $G_\ell^I(s)$

$$G_0^0(s) = \frac{(s-s_0)^2}{(s_\varepsilon - s)^2 + \frac{s-4}{s_\varepsilon}\gamma_\varepsilon^2} \sum_{m=0}^{5} q_m^0 \, z^m$$

$$G_1^1(s) = \frac{(s-4)^2}{(s_\rho - s)^2 + \frac{s-4}{s_\rho}\gamma_\rho^2} \sum_{n=0}^{5} q_m^1 \, z^m \qquad (V.16)$$

$$G_0^2(s) = \frac{(s-s_2)^2}{s-s_v} \sum_{n=0}^{4} q_m^2 \, z^m$$

Dans ces expressions :

- s_ε et $\gamma_\varepsilon = m_\varepsilon \Gamma_\varepsilon / m_\pi^2$, s_ρ et $\gamma_\rho = m_\rho \Gamma_\rho / m_\pi^2$ sont les masses carrées et les largeurs des mésons ε et ρ respectivement.

- s_o et s_2 sont les zéros des ondes S, et s_v est la position de l'état lié virtuel de l'onde S(I=2).

4.3 - Utilisation pratique de ces paramétrisations

Les degrés de liberté offerts par les paramétrisations sont réduits de la manière suivante.

A chaque ensemble $G_\ell^I(s)$, l'équation (V.13) et les relations de croisement sur la région physique (V.6) associent l'amplitude $f_\ell^I(s)$ pour $0 < s < 4$ et la partie réelle $R_e\, f_\ell^I(s)$ pour $4 < s < 40$. Mais, d'autre part, l'équation (V.12) donne également $f_\ell^I(s)$ pour $0 < s < 4$ et l'unitarité élastique fournit $R_e\, f_\ell^I(s)$ pour $s > 4$.

Ces deux représentations de $f_\ell^I(s)$, qui correspondent aux mêmes fonctions $G_\ell^I(s)$, doivent être identiques.

Nous procédons alors de la manière suivante (les calculs détaillés sont exposés dans l'appendice B) :

- Les paramètres liés à la région non-physique, c'est-à-dire la position des zéros s_o et s_2 et du pôle s_v, qui apparaissent dans les deux représentations de $f_\ell^I(s)$, sont calculés par self-consistance.

- Les quatre premiers coefficients q_m^I dans chaque isospin sont fixés au moyen des conditions aux seuils s=4 et s=0 (V.14)

- Les paramètres q_m^I restants sont liés aux résidus des pôles. g_4^2 est calculé à partir de Γ_V donné par l'équation (V.15). g_4^1 et g_5^1 sont déterminés en imposant la masse (m_ρ =765 MeV) et la largeur (Γ_ρ =125 $\pm$ 15 MeV) du méson ρ . g_4^o et g_5^o sont, soit laissés libres, soit calulés en fonction d'un paramètre libre $s_D > 4$ qui représente la valeur de s pour laquelle nous imposons le passage du déphasage δ_o^o par 90°.

- Puisque les termes asymptotiques sont mal connus, nous avons laissé varier le paramètre σ autour de la valeur centrale 0,08. En fait, σ est toujours resté dans l'intervalle (0,07 , 0,095)

Après cette élimination préliminaire, six (ou sept) paramètres restent libres : a_o^o, a_o^2, s_ξ , Γ_ℓ , s_D (ou g_4^o et g_5^o) et σ . Ils sont utilisés pour minimiser la différence entre les deux représentations des $f_\ell^I(s)$ sur tout l'intervalle $0 < s < 40$.
Plus précisément, nous minimisons la fonction

$$\chi^2 = \sum_{I=0}^{2} \sum_{N=1}^{20} \left\{ \frac{f_\ell^{I,u}(s_N) - f_\ell^{I,Rc}(s_N)}{f_\ell^{I,u}(s_N) + f_\ell^{I,Rc}(s_N)} \right\}^2$$

où $f_\ell^{I,u}(s_N)$ et $f_\ell^{I,Rc}(s_N)$ sont les parties réelles des amplitudes $f_\ell^I(s)$ prises à $s=s_N$ ($0 < s_N < 40$), et calculées à partir des mêmes fonctions $G_\ell^I(s)$ au moyen de l'unitarité élastique (ou de l'équation V.12 sur $0 < s < 4$) et des relations de croisement (V.6) respectivement.

4.4 - Résultats

Nous trouvons deux ensembles de solutions pour lesquels, dans chaque isospin, l'unitarité, mesurée par le rapport $R_\ell^I = |(f_\ell^{I,u} - f_\ell^{I,Rc})/f_\ell^{I,u}|$ est vérifiée à 10^{-2} près, avec les deux exceptions suivantes :

(i) Pour l'ensemble I, R_1^1 peut atteindre 5.10^{-2} pour $35 < s < 40$

(ii) Pour l'ensemble II, R_0^0 peut atteindre 3.10^{-2} pour $10 < s < 16$

Une partie de ces écarts peut d'ailleurs être expliquée par les incertitudes dont est entachée la détermination des contributions asymptotiques.

L'ensemble I (fig.12) est obtenu pour les valeurs suivantes des paramètres

$$a_0^0 = 0,20 \pm 0,06 \qquad E_\varepsilon = 510 \pm 70 \text{ Mev}$$

$$a_0^2 = -0,08 \pm 0,015 \qquad \Gamma_\varepsilon = 495 \pm 170 \text{ Mev} \qquad \frac{a_0^0}{a_0^2} = -2,9 \pm 1,4$$

Le déphasage δ_0^0 de l'onde S(I=0) est du type up-down et peut varier dans une bande assez large : il est compris entre 65° et 100° à la po-

sition du ρ . Cependant, à l'intérieur de cette bande, δ_0^0 n'est pas strictement lié à la longueur de diffusion a_0^0 puisque, pour une même valeur de cette dernière, il peut passer par 90° à toute énergie comprise entre 600 et 900 MeV. Le déphasage correspondant δ_0^2 de l'onde S(I=2) reste toujours petit, négatif. Il décroit quand δ_0^0 croit, et varie entre -21° et -29° à la position du ρ . Le déphasage δ_1^1 de l'onde P est le même sur tout l'ensemble de solutions et correspond aux valeurs suivantes de la longueur de diffusion a_1 et de la largeur Γ_ρ

$$a_1^1 = 0,044 \pm 0,004$$

$$\Gamma_\rho = 135 \pm 5 \text{ Mev}$$

Nous avons calculé les ondes D à partir de leurs parties réelles données par les équations analogues à (V.6). Elles sont très petites, positives pour I=0 et négatives (sauf parfois au voisinage du seuil) pour I=2. Elles atteignent respectivement +3° et -1° à la masse du ρ. Les longueurs de diffusion correspondantes a_2^I sont :

$$a_2^0 = 0,0021 \pm 0,0003$$

$$a_2^2 = 0,00025 \pm 0,00025$$

Sur la région non-physique, les deux ondes S, comme avec le modèle précédent, sont quasi-linéaires avec des zéros situés à

$$s_0 = 1,6 \pm 0,7$$

$$s_2 = 1,1 \pm 0,5$$

de telle sorte que $4s_0 + 5s_2 = 12 \pm 0,1$

L'ensemble II (fig.13) est moins satisfaisant que le premier

quant à l'unitarité. Il est obtenu pour les valeurs suivantes des paramètres

$$a_0^0 = 0,14 \pm 0,013 \qquad E_\varepsilon = 825 \pm 50 \text{ Mev}$$

$$a_0^2 = -0,055 \pm 0,005 \qquad \Gamma_\varepsilon = 1000 \pm 200 \text{ Mev} \qquad \frac{a_0^0}{a_0^2} = -2,5 \pm 0,5$$

Le déphasage δ_0^0 est ici du type up-up et passe par 90° à $20 < s < 30$. Mais le pôle associé est très éloigné de l'axe réel. De plus, $G_0^0(s)$ devient franchement négatif et viole donc la positivité pour $s > 45$. Bien que cette région soit hors du domaine de validité de notre modèle, cela jette quelque suspicion sur ces solutions. Les déphasages δ_0^2 sont toujours négatifs et légèrement plus hauts que dans le cas précédent. L'onde P est stable et correspond maintenant à

$$a_1^1 = 0,0335 \pm 0,001$$

$$\Gamma_\rho = 110 \text{ Mev}$$

Les ondes D ne sont pas changées.
Au-dessous du seuil s=4, les ondes S sont également quasi-linéaires et telles que

$$S_0 = 1,4 \pm 0,3$$

$$S_2 = 1,25 \pm 0,2$$

5 - Discussion

Les solutions exposées ci-dessus, comme celles du chapitre précédent, sont obtenues dans le cadre de l'analyticité, de l'unitarité et de la symétrie de croisement. Elles possèdent le même comportement aux

seuils s=0 et s=4, et sont également compatibles avec la présence dans l'onde P de la résonance ρ . Cependant, ces diverses contraintes sont imposées de manière différente dans l'un et l'autre cas.

Sur la région non-physique et dans son proche voisinage, les résultats correspondants sont néanmoins similaires, surtout si nous faisons la comparaison avec l'ensemble I. Les domaines de variation des longueurs de diffusion a_o^o et a_o^2 se recoupent largement. Sur l'intervalle $0 < s < 4$, les amplitudes partielles S et P sont également quasi-linéaires, et les deux ondes S ont chacune un zéro. Enfin, sur la région physique des très basses énergies, les déphasages δ_o^o et δ_o^2 présentent les mêmes traits caractéristiques. En particulier, δ_o^o croit rapidement au dessus du seuil s=4, bien que a_o^o reste petit. Sur l'intervalle $0 < s < 12$, où la comparaison est possible, l'étude des ondes partielles S et P au moyen des relations de croisement sur la région physique confirme donc les conclusions de notre modèle précédent, ainsi d'ailleurs que celles de Le Guillou, Morel et Navelet.

Nos résultats diffèrent quelque peu de ceux qu'obtiennent Basdevant, Froggatt et Petersen (54) dans une étude comparable. Nous nous appuyons d'ailleurs sur des hypothèses légèrement différentes. Nous nous sommes placés d'emblée dans la situation déterminée au chapitre précédent en imposant la présence dans chacune des ondes S d'un zéro à $s > 0$, ce qui entraine l'existence d'un état lié virtuel dans l'onde S(I=2). Nous avons vu que cela revenait à limiter les valeurs possibles des longueurs de diffusion, de telle sorte que $a_o^o < 0{,}30$ et $a_o^2 > -0{,}15$. Les solutions associées à de fortes valeurs de a_o^o et a_o^2 sont donc hors de notre portée.

D'autre part, le terme asymptotique est traité différemment. Puisque ce dernier est mal connu et n'est plus négligeable au delà d'une certaine énergie, nous avons préféré limiter notre étude au domaine $s < 40$, où les erreurs dans la détermination de cette contribu-

tion ne jouent pas un rôle important. Ils étendent, au contraire, leur analyse jusqu'à $s \simeq 60$, tout en tolérant sur ce terme asymptotique des écarts allant jusqu'à 30%.

Nous contrôlons enfin les solutions sur la région $0 < s < 4$ aussi bien que sur la région $4 < s < 40$.

Ces considérations peuvent expliquer, dans une certaine mesure, que nos solutions soient, non pas différentes, mais plus restreintes que les leurs. Dans la première partie de leur étude, qui n'inclut pas l'inélasticité, ils trouvent en effet des solutions dans une région du plan (a_0^0, a_0^2) bien plus grande que la nôtre, mais qui englobe celle-ci. De plus, en chaque point (a_0^0, a_0^2), ils obtiennent une infinité de solutions, caractérisées par la valeur à laquelle δ_0^0 passe par 90°. Au delà de l'énergie du ρ, leur déphasage δ_0^0 peut prendre pratiquement n'importe quelle valeur supérieure à 50°, tandisque δ_0^2 reste constant. Nous observons également une ambiguité semblable, mais plus restreinte, en ce sens que, pour une même valeur de a_0^0, nos déphasages δ_0^0 peuvent passer par 90° à n'importe quelle énergie supérieure à 600 MeV. Cependant, δ_0^0 est alors, soit du type "down" (ensemble I), soit du type up (ensemble II) au delà de s_ρ, suivant les valeurs de a_0^0.

Un travail récent (55), qui analyse diverses règles de somme applicables à l'amplitude $F = F^{I=1} + F^{I=2}$ et à son inverse, confirme l'existence d'une large classe d'ondes S(I=2) compatibles avec une onde P résonante tant que a_1^1 est approximativement inférieur à 0,08. Les longueurs de diffusion a_0^2 associées à cette classe d'ondes S(I=2) varient entre -0,35 et 0,06. Compte tenu de ces limitations, des bornes phénoménologiques de Goebel et Shaw (50) et de l'approximation

$$2a_0^0 - 5a_0^2 \sim 18a_1^1$$

on aboutit finalement au résultat suivant :

$$-0,3 < a_0^0 < 0,8 \qquad -0,3 < a_0^2 < 0,06$$

Les bornes inférieures précédentes peuvent d'ailleurs être améliorées si on utilise, dans la relation de croisement pour la combinaison neutre, les déphasages expérimentaux des ondes S de 500 à 1200 MeV. Les déphasages de Baton, Laurens et Reignier conduisent par exemple aux valeurs

$$-0,10 < a_0^0 \qquad -0,17 < a_0^2$$

Un domaine D (a_0^0, a_0^2, a_1^1) contenant les valeurs possibles des trois longueurs de diffusion est ainsi défini (fig. 14). Les solutions des modèles que nous avons étudiés dans ce travail appartiennent à ce domaine D. A l'intérieur de D, elles prennent place dans le domaine plus restreint qui caractérise les meilleures solutions des équations considérées, tout au moins dans l'hypothèse où les ondes D et supérieures sont négligeables.

La même étude (55) montre par ailleurs, sur un contre-exemple, que les contraintes des algèbres de courant sont compatibles avec de grandes longueurs de diffusion, pourvu que dans les développements des amplitudes en q_s, q_t, q_u ($q_s = \sqrt{(s-4)/4}$), on tienne compte des pôles associés aux états liés virtuels qui peuvent apparaitre sur l'intervalle $0 < s < 4$, c'est-à-dire sur une région proche du domaine de validité de tels modèles. Cela rejoint les conclusions de Basdevant et Hayot (56) qui ont montré qu'à toute amplitude définie sur la couche de masse, on peut associer une amplitude valable hors de la couche de masse et qui satisfasse identiquement la règle de self-consistance d'Adler.

Nous avons enfin confronté l'ensemble de nos solutions aux résultats expérimentaux, et, en particulier, aux quantités suivantes:

(i) les sections efficaces $\sigma(\pi^+\pi^- \to \pi^+\pi^-)$, $\sigma(\pi^-\pi^\circ \to \pi^-\pi^\circ)$

$\sigma(\pi^+\pi^- \to \pi^\circ\pi^\circ)$ (2)

(ii) les quotients (57)

$$R_1 = \sigma(\pi^+\pi^- \to \pi^\circ\pi^\circ) / \sigma(\pi^+\pi^+ \to \pi^+\pi^+)$$

$$R_2 = \sigma(\pi^+\pi^- \to \pi^\circ\pi^\circ) / \sigma(\pi^+\pi^- \to \pi^+\pi^-)$$

(iii) la différence $\delta_0^\circ - \delta_1^1$ à basse énergie, donnée par la désintégration K_{ℓ_4} (5)

Ces trois tests permettent d'éliminer l'ensemble II et réduisent, de manière appréciable, l'ensemble I. Les solutions ainsi sélectionnées sont tracées sur la figure 12. Les valeurs correspondantes des paramètres sont :

$a_0^\circ = 0,23 \pm 0,03$ $\qquad$ $E_\varepsilon = 510 \pm 25$ Mev

$a_0^2 = -0,067 \pm 0,03$ $\qquad$ $\Gamma_\varepsilon = 495 \pm 75$ Mev

avec

$S_0 = 1,04 \pm 0,14$ $\qquad$ $a_1^1 = 0,0448 \pm 0,002$ $\qquad$ $a_\ell^\circ \simeq 0,0021$

$S_2 = 1,55 \pm 0,10$ $\qquad$ $a_2^2 \simeq 0,00027$

La différence $\delta_0^\circ(m_K) - \delta_0^2(m_K)$ vaut $57^\circ \pm 5^\circ$

Ces trois tests permettent d'éliminer l'ensemble II et réduisent, de manière appréciable, l'ensemble I. Les solutions ainsi sélectionnées sont tracées sur la figure 12. Les valeurs correspondantes des

Les déphasages δ°_{0} associés reproduisent assez bien les résultats obtenus par Scharenguivel, Gutay et Miller (58) et, plus récemment, par Protopopescu et al. (3). Ils sont en bon accord avec la détermination théorique de Le Guillou, Morel et Navelet (49) sur tout l'intervalle $4 < s < 40$, et celle de notre modèle précédent à basse énergie.

Conclusion

Au cours de ce travail, nous avons étudié la diffusion méson π. méson π en n'utilisant, dans la mesure du possible, que les propriétés d'analyticité, d'unitarité et de symétrie de la matrice S, qui ont été rigoureusement démontrées dans le cadre de la théorie axiomatique des champs. Le seul apport phénoménologique est constitué par l'existence du méson ρ , de masse et de largeur données, à l'exclusion de toute autre information expérimentale.

Dans un premier temps, nous avons montré sur un modèle que la combinaison de toutes ces contraintes permettait de restreindre, de manière appréciable, le comportement des ondes S, P et D au dessous du seuil s=4 et sur la région physique des très basses énergies $4 < s < 12$. Les ondes S, en particulier, sont caractérisées par des longueurs de diffusion petites et par la présence de zéros sur l'intervalle (0,4). Ces conclusions sont confirmées par les résultats obtenus par le Guillou, Morel et Navelet dans une étude similaire. Elles rejoignent également les résultats obtenus à partir des algèbres de courant et de modèles asymptotiques.

Toujours dans la même optique, nous avons ensuite étendu cette étude au domaine $0 < s < 40$, à l'aidè des relations de croisement sur la région physique. Nous nous sommes placés pour cela dans la même situation que dans le cas ci-dessus, en postulant l'existence dans chacune des ondes S d'un zéro à $s > 0$ et la présence d'un état lié virtuel dans l'onde S(I=2). Nous retrouvons alors par cette deuxiè-

me méthode des amplitudes partielles S et P tout à fait semblables aux précédentes sur la région $0 < s < 12$. Mais à plus haute énergie, cette nouvelle approche, libérée d'un certain nombre d'hypothèses liées au premier modèle, met en évidence certaines ambiguités, et notament une ambiguité de type C.D.D., qui interdisent de prédire de manière unique les ondes S à partir de l'onde P et des propriétés générales de la matrice S. Le relachement des hypothèses sur l'existence des zéros et des pôles virtuels dans les ondes S conduirait probablement à une indétermination plus grande encore, notamment en ce qui concerne les longueurs de diffusion a_o^o et a_o^2, comme cela semble suggéré par les travaux de Basdevant, Froggat et Petersen d'une part, et de Bonnier et Procureur d'autre part.

Cette dernière étude montre également que les valeurs des longueurs de diffusion a_o^o et a_o^2 plus grandes que celles de Weinberg ne sont pas incompatibles avec les contraintes des algèbres de courant, pourvu que l'on tienne compte des états liés virtuels qui peuvent apparaitre dans les ondes S de la diffusion pion-pion.

Seuls les modèles construits à partir des relations de croisement sur la région non-physique semblent donc à l'heure actuelle écarter de grandes valeurs des longueurs de diffusion, puisque notre étude, celle de Le Guillou, Morel et Navelet, ainsi que les nombreux travaux qui utilisent ces relations pour imposer le croisement, conduisent tous à de petites valeurs de a_o^o et a_o^2. Notre modèle ainsi que celui de Le Guillou, Morel et Navelet utilisent cependant un développement au voisinage de l'origine $s=0$ pour simuler tout ou partie de la coupure de gauche. Il est possible que pour des raisons de cohérence interne, liées en particulier à la convergence de ce développement, seules de petites valeurs des longueurs de diffusion soient permises.

Sous réserve d'une étude plus approfondie des relations de croisement sur la région non-physique, il semble donc que nous nous acheminions à l'heure actuelle vers un schéma dans lequel les amplitudes de la diffusion méson π - méson π peuvent être associées à des longueurs de diffusion qui prennent leurs valeurs dans un domaine relativement grand. A l'intérieur de ce domaine, les valeurs proches de celles de Weinberg auxquelles se rattachent les notres, apparaissent légèrement favorisées.

Compte tenu des approximations faites, la combinaison des propriétés fondamentales de la matrice S et de l'existence du méson ρ ne semble pas permettre de déterminer de manière unique les amplitudes pion-pion à basse énergie. Une connaissance plus exacte des contributions asymptotiques pourrait lever en partie cet arbitraire. Il peut également s'avérer nécessaire d'introduire l'inélasticité, comme semble le suggérer le travail d'Atkinson. Des renseignements supplémentaires sont de toute façon indispensables pour contraindre davantage les solutions et les prolonger à plus haute énergie.

APPENDICE A

Calcul de la discontinuité de gauche près de s = 0

Partons de l'expression suivante des ondes partielles

$$f_\ell^I(s) = \frac{2}{4-s}\int_0^{\frac{4-s}{2}} dt\; P_\ell\left(1+\frac{2t}{s-4}\right) F^I(s+i\varepsilon,\, t,\, u) \qquad (A.1)$$

Puisque les amplitudes partielles $f_\ell^I(s)$ sont réelles à l'intérieur du triangle $s < 4$, $t < 4$ et $u < 4$, la partie imaginaire $\mathrm{Im}\, f_\ell^I(s)$ pour $-4 < s < 0$ s'écrit :

$$\mathrm{Im}\, f_\ell^I(s) = \frac{2}{4-s}\int_0^{-s} dt\; P_\ell\left(1+\frac{2t}{s-4}\right) A^I(s+i\varepsilon,\, t,\, u) \qquad (A.2)$$

En utilisant la symétrie de croisement s - u et en écrivant (A.2) avec la variable d'intégration u, nous obtenons :

$$\mathrm{Im}\, f_\ell^I(s) = \frac{2}{s-4}\int_4^{4-s} du\; P_\ell\left(-1-\frac{2u}{s-4}\right) \bar{C}_J^I\, A^J(u+i\varepsilon,\, t,\, s) \qquad (A.3)$$

Nous sommes maintenant dans la région $4 < u < 4-s$, $0 < t < 4$ et nous pouvons développer les parties absorptives $A^J(u+i\varepsilon\,, t)$ sur les ondes partielles :

$$A^J(u+i\varepsilon,\, t,\, s) = \sum_{\ell'} (2\ell'+1)\, \mathrm{Im}\, f_{\ell'}^J(u)\; P_{\ell'}\left(-1-\frac{2s}{u-4}\right) \qquad (A.4)$$

Quand s tend vers zéro, u tend vers 4. Nous pouvons développer les $\mathrm{Im}\, f_{\ell'}^J(u)$ près de u = 4

$$\mathrm{Im}\, f_{\ell'}^J(u) = \rho(u)(u-4)^{2\ell'}\left\{\left[a_{\ell'}^J\right]^2 + A_{\ell'}^J(u-4) + B_{\ell'}^J(u-4)^2 + C_{\ell'}^J(u-4)^3 + \theta(u-4)^4\right\} \qquad (A.5)$$

En portant les expressions (A.4) et (A.5) dans (A.3), nous obtenons

$$\mathrm{Im}\, f_\ell^I(s,0) = I^I_{\ell,3}\, x^3 + I^I_{\ell,5}\, x^5 + I^I_{\ell,7}\, x^7 + I^I_{\ell,9}\, x^9 + O(x^{11}) \qquad (A.6)$$

avec, pour les ondes s

$$I^I_{0,3} = 4\, a'_I / 3$$

$$I^I_{0,5} = \frac{26}{15}\, a'_I - \frac{16}{5}\, A'_I$$

$$I^I_{0,7} = \frac{409}{210}\, a'_I - \frac{152}{35}\, A'_I + \frac{64}{7}\, B'_I + \frac{1728}{35}\, c^I_1 (a^1_1)^2 \qquad (A.7)$$

$$I^I_{0,9} = \frac{2629}{1260}\, a'_I - \frac{526}{105}\, A'_I + \frac{800}{63}\, B'_I - \frac{256}{9}\, c'_I + \frac{6944}{105}\, c^I_1 (a^1_1)^2 - \frac{2816}{21}\, c^I_1 A^1_1$$

et pour l'onde P

$$I^1_{1,3} = 4\, a'_1 / 3$$

$$I^1_{1,5} = \frac{14}{5}\, a'_1 - \frac{16}{5}\, A'_1$$

$$I^1_{1,7} = \frac{181}{42}\, a'_1 - \frac{216}{35}\, A'_1 + \frac{64}{7}\, B'_1 + \frac{864}{35}\, (a^1_1)^2 \qquad (A.8)$$

$$I^1_{1,9} = \frac{1051}{180}\, a'_1 - \frac{578}{63}\, A'_1 + \frac{352}{21}\, B'_1 - \frac{256}{9}\, c'_1 + \frac{1712}{35}\, (a^1_1)^2 - \frac{1408}{21}\, A^1_1$$

où

$$a'_I = c^I_0 (a^0_0)^2 + c^I_2 (a^2_0)^2 \qquad x = \frac{\sqrt{s}}{2}$$

$$A'_I = c^I_0 A^0_0 + c^I_2 A^2_0$$

$$B'_I = c^I_0 B^0_0 + c^I_2 B^2_0$$

$$c'_I = c^I_0 c^0_0 + c^I_2 c^2_0$$

En raison du comportement normal au seuil dans (A.5), seules les ondes S contribuent aux coefficients $I^I_{\ell,3}$ et $I^I_{\ell,5}$, et les ondes S et P aux coefficients $I^I_{\ell,7}$ et $I^I_{\ell,9}$.

Revenons au modèle du chapitre IV

$$f^I_\ell(s) = \frac{N^I_\ell(s)}{1 + N^I_\ell(s)\, D^I_\ell(s)} \qquad (A.9)$$

avec

$$N^I_0(s) = f^I_0(0) + \frac{s}{4}\left(\tilde{a}^I_0 - f^I_0(0)\right) + s(s-4)\left\{A^I_0 + \sum_{m=1}^{4} A^I_{2m}\, W_{2m}(v^2)\right\}$$

$$N^1_1(s) = (s-4)\left\{-\frac{f^1_1(0)}{4} + \frac{s}{4}\left[+\frac{f^1_1(0)}{4} + a^1_1\right] + s(s-4)\sum_{m=1}^{4} A^1_{2m}\, W_{2m}(v^2)\right\}$$

D'après (A.9), nous avons à $s < 0$

$$\mathrm{Im}\, N^I_\ell(s) = \mathrm{Im}\, f^I_\ell(s) \left|\frac{N^I_\ell(s)}{f^I_\ell(s)}\right|^2 \qquad (A.10)$$

Avec la définition adoptée pour $D^I_\ell(s)$, nous obtenons successivement

$$D^I_\ell(s) = e^I_\ell\, x^4 + e_1\, x^6 + \theta(x^8) \qquad (A.11)$$

avec

$$e^I_\ell = -\frac{4}{3\pi}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{s^I_\ell}\right) \qquad e_1 = -\frac{16}{105\,\pi}$$

$$\left|\frac{N^I_\ell(s)}{f^I_\ell(s)}\right|^2 = 1 + 2\, e^I_\ell\, f^I_\ell(0)\, x^4 + 2\,\Lambda^I_\ell\, x^6 + \theta(x^8) \qquad (A.12)$$

où

$$\Lambda_0^I = e_1 f_0^I(0) + e_0^I \left\{ \hat{a}_0^I - f_0^I(0) - 16 A_0^I - 4\pi^2 A_2^I + \pi^4 A_4^I - \frac{3\pi^6}{4} A_6^I + \frac{17\pi^8}{16} A_8^I \right\}$$

$$\Lambda_1^1 = e_1 f_1^1(0) - e_1^1 \left\{ 2 f_1^1(0) + 4 a_1^1 + 4\pi^2 A_2^1 - \pi^4 A_4^1 + \frac{3\pi^6}{4} A_6^1 - \frac{17\pi^8}{16} A_8^1 \right\}$$

$$-\operatorname{Im} N_\ell^I(s) = 16\pi \left\{ A_2^I x^3 + \left[2A_4^I - \frac{5A_2^I}{6} \right] x^5 + \left[3A_6^I - A_4^I - \frac{11}{120} A_2^I \right] x^7 + \left[4A_8^I - \frac{A_6^I}{2} - \frac{23}{60} A_4^I - \frac{17}{560} A_2^I \right] x^9 \right\} + O(x^9) \qquad (A.13)$$

En portant les expressions (A.6), (A.12) et (A.15) dans la relation (A.10) et en identifiant terme à terme les coefficients de x^n , nous obtenons le système

$$16\pi A_2^I = I_{\ell,3}^I$$

$$16\pi \left[2A_4^I - \frac{5}{6} A_2^I \right] = I_{\ell,5}^I \qquad (A.14)$$

$$16\pi \left[3A_6^I - A_4^I - \frac{11}{120} A_2^I \right] = I_{\ell,7}^I + 2 e_\ell^I f_\ell^I(0) I_{\ell,3}^I$$

$$16\pi \left[4A_8^I - \frac{A_6^I}{8} - \frac{23}{60} A_4^I - \frac{17}{560} A_2^I \right] = I_{\ell,9}^I + 2 e_\ell^I f_\ell^I(0) I_{\ell,5}^I + 2 \Lambda_\ell^I I_{\ell,3}^I$$

Les coefficients $I_{\ell,n}^I$ donnés par les expressions (A.7) et (A.8) sont des fonctions linéaires des A_{2n}^I . Les équations (A.14) forment alors un système linéaire de douze équations aux douze inconnues A_{2n}^I dont la résolution permet de calculer les A_{2n}^I en fonction des paramètres restants a_ℓ^I, $f_\ell^I(0)$, δ_ℓ^I et A_0^I .

APPENDICE B

Calcul des fonctions $G_\ell^I(s)$

Nous partons de l'expression des fonctions $G_\ell^I(s)$ définie par les Equations (V.16) :

$$G_\ell^I(s) = D^I(s)\left\{\sum_{n=0}^{5} g_n^I\, \tau^n\right\} \qquad (B_1)$$

où

— $D^I(s)$ est le terme de pôle et de zéro

$$D^0(s) = (s-s_0)^2 / \left[(s_\varepsilon - s)^2 + \frac{s-4}{s_\varepsilon}\gamma_\varepsilon^2 \right]$$

$$D^1(s) = (s-4)^2 / \left[(s_\rho - s)^2 + \frac{s-4}{s_\rho}\gamma_\rho^2 \right] \qquad (B_2)$$

$$D^2(s) = (s-s_2)^2 / (s-s_\nu)$$

— s_I est la position des zéros des ondes ε et ρ ($s_1 = 4$)

— $\tau = \dfrac{\sqrt{s}-2}{\sqrt{s}+2}$ de telle sorte que

$$\tau(s \sim 4) = (s-4)/16 + \mathcal{O}[(s-4)^2]$$

$$\tau(s \sim 0) = -1 + \sqrt{s} - \frac{s}{2} + \mathcal{O}(s\sqrt{s}) \qquad (B_3)$$

Considérons pour le moment les quantités s_I, s_ν, Γ_ν comme données et réordonnons dans les expressions (B_1) la série en τ sous la forme

$$\sum_{n=0}^{5} g_n^I\, \tau^n = h_0^I + h_1^I\tau + h_2^I\tau^2 + h_3^I\tau^3 + (h_4^I + \tau h_5^I)\tau(1+\tau)^3$$

Développons les fonctions $G_\ell^I(s)$ près de $s = 0$ et $s = 4$, et identifions terme à terme avec les développements des mêmes $G_\ell^I(s)$ définis par les Equations (V.14). Nous obtenons ainsi dans chaque isospin quatre équations qui permettent de calculer les quatre premiers coefficients h_n^I ($n = 3$), les contributions liées aux coefficients h_4^I et h_5^I étant d'ordre supérieur.

En posant :

$$D_4^I = 1 / D^I(4)$$

$$D_0^I = 1 / D^I(0)$$

les $G_\ell^I(s)$ s'écrivent maintenant en fonction des longueurs de diffusion a_ℓ^I et des quantités $f_\ell^I(0)$

$$G_\ell^I(s) = D^I(s) \left\{ D_4^I (a_\ell^I)^2 (1+z)^3 + \frac{D_0^I}{16} z(1+z)^2 + D_0^I f_\ell^I(0)\, z(1+z)\frac{(3z+5)}{8} + (h_4^I + z\, h_5^I) z (1+z)^3 \right\} \quad (B\,4)$$

Les deux derniers coefficients h_4^I et h_5^I sont liés aux résidus aux pôles.

— h_4^1 et h_5^1 sont déterminés en imposant la masse ($m_\rho = 765$ Mev) et la largeur ($\Gamma_\rho = 125 \pm 20$ Mev) du méson ρ.

— h_4^2 est calculé à partir du résidu Γ_ν tel que

$$\lim_{s \to s_\nu} (s - s_\nu)\, G_0^2(s_\nu) = \Gamma_\nu$$

— h_4^0 et h_5^0 sont soit laissés libres, soit fixés en fonction de l'énergie E_D ($s_D = E_D^2$) à laquelle le déphasage δ_0^0 passe par 90°.

Finalement, nous obtenons h_4^I et h_5^I sous la forme :

$$h_L^I = h_{L,0}^I - D_0^I f_\ell^I(0)\, h_{L,1}^I + (a_1^1)^2 (s_\rho - 4)^2 h_{L,2}^I \delta_{\ell 1} \quad (L = 4,5) \qquad (B5)$$

où les $h_{L,0}^I$, $h_{L,1}^I$, et $h_{L,2}^I$ ne dépendent pas de $f_\ell^I(0)$ et a_1^1.

Les fonctions $G_\ell^I(s)$ deviennent :

$$G_\ell^I(s) = I_\ell^I(s) + D_0^I f_\ell^I(0)\, J_\ell^I(s) + (a_1^1)^2 K_\ell^I(s) \delta_{\ell 1} \qquad (B6)$$

avec

$$I_\ell^I(s) = D^I(s)\left\{ d^I (a_\ell^I)^2 D_4^I (1+z)^3 + \frac{D_0^I}{16} z(1+z)^2 + \left[h_{4,0}^I + z\, h_{5,0}^I \right] z(1+z)^3 \right\} \qquad d^I = 1, I = 0,2 \\ = 0, I = 1$$

$$J_\ell^I(s) = D^I(s)\left\{ z(1+z)\frac{(3z+5)}{8} - \left[h_{4,1}^I + z\, h_{5,1}^I \right] z(1+z)^3 \right\} \qquad (B7)$$

$$K_\ell^I(s) = D^I(s)\left\{ (1+z)^3 + \left[h_{4,3}^I + z\, h_{5,3}^I \right] z(1+z)^3 \right\} (s_\rho - 4)^2 \delta_{\ell 1}$$

A ce stade, les $G_\ell^I(s)$ dépendent

— des paramètres de la minimisation $a_0^0, a_0^2, s_\varepsilon, \gamma_\varepsilon, s_D$ (ou h_4^0, h_5^0), σ.

— des quantités $a_1^1, f_\ell^I(0), s_I, s_V, \pi_V$ que nous calculons par self-consistance.

Le schéma de calcul est le suivant.

a) Outre les paramètres de la minimisation, nous nous donnons

les valeurs initiales :

i) $s_0 = s_2 = 4/3$

ii) s_{V_0} tel que $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{s_{V_0}}{4 \cdot s_{V_0}}} = (2a_0^0 + a_0^2)/6$, où $(2a_0^0 + a_0^2)/6$ est la valeur de $f_0^2(0)$ donnée par l'approximation linéaire.

iii) $\Gamma_{V_0} = s_{V_0}^2/8$, qui est une approximation de l'Eq.(V.15)

b) Nous calculons les fonctions $I_\ell^I(s)$, $J_\ell^I(s)$, $K_\ell^I(s)$ déterminées en (B.7). Nous obtenons alors $G_\ell^I(s)$ en fonction linéaire des $f_\ell^I(0)$ et en fonction quadratique de a_1^1 (Eq. B.6).

c) Ces expressions des $G_\ell^I(s)$ sont portées dans les relations de croisement où nous faisons $s = 0$. Nous obtenons un système de trois équations linéaires en $f_\ell^I(0)$ qui nous permettent de calculer ces trois quantités en fonction de a_1^1

d) De même, la relation de croisement pour $f_1^1(s)$ avec $s = 4$ fournit une équation carrée en a_1^1 qui détermine ce dernier.

e) Les $G_\ell^I(s)$ ne dépendent plus maintenant que de s_0, s_2, s_V, Γ_V et des paramètres de la minimisation. Les relations de croisement sur la région physique et la relation d'unitarité élastique leur font correspondre les amplitudes $f_\ell^I(s)$, à partir desquelles nous calculons de nouvelles valeurs de s_0, s_2, s_V et Γ_V . Nous recommençons alors les opérations b) c) et d) pour une nouvelle itération.

Finalement, nous opérons la minimisation sur les paramètres a_0^0, a_0^2, s_ε, γ_ε, s_D (ou h_4^0 et h_5^0) et σ.

Références

1- Conférence on $\pi\pi$ and $K\pi$ interactions - Argonne 1969.
D. Morgan et J. Pisut, Springer tracts in modern physics 55, 1 (1970).
J.L. Basdevant et J. Reignier, Pion-pion interaction I and II, Hercegnovi lectures (1970).

2- J.P. Baton, G. Laurens et J. Reignier, Nucl. Phys. B3, 349 (1967); Phys. Letters 33B, 525 (1970) ; 33B, 528 (1970)

3- S.D. Protopopescu et al., Preprint L.B.L. 787 (1972)

4- J.R. Bensinger et al., Phys. Letters 36B, 134 (1971)

5- A. Zylberstein et al., Phys. Letters 38B, 457 (1972)

6- W.M. Katz et al., conférence on $\pi\pi$ and $K\pi$ interactions - Argonne 1969
E. Colton et al., Phys. Rev. D3, 2028 (1971)
W.D. Walker et al., Phys. Rev. Letters 18, 630 (1967)

7- J.L. Petersen, Physics Report 2C, 155 (1971)

8- G.F. Chew et S. Mandelstam, Phys. Rev. 119, 467 (1960)

9- C. Lovelace, Nuovo Cimento 21, 305 (1961) ; 22, 102 (1961)

10- P.D.B. Collins et E.J. Squires, Springer tracts 45, 1 (1968)

11- F. Zachariasen, Phys. Rev. Letters 7, 112 (1961) ; 7, 268 (1961)
L.A.P. Balazs, Phys. Rev. 128, 1939 (1962) ; 129, 872 (1963)
D.C. Teplitz et V.L. Teplitz, Phys. Rev. 137, B142 (1965)
P.D.B. Collins, Phys. Rev. 142, 1163 (1966)

12- G.F. Chew et C.E. Jones, Phys. Rev. 135, B208 (1964)
P.D.B. Collins et V.L. Teplitz, Phys. Rev. 140, B663 (1965)

13- G.F. Chew, Phys. Rev. 140, B1427 (1965)
P.D.B. Collins, Phys. Rev. 142, 1163 (1966)
R.C. Jonhson et P.D.B. Collins, Phys. Rev. 185, 2020 (1969) ; 182, 1755 (1969) ; 177, 2472 (1969)
B.R. Webber, Phys. Rev D3, 1971 (1971)

14- D. Atkinson, Nucl. Phys. B7, 375 (1968) ; B8, 377 (1968) ; B13 415 (1969) ; B23, 397 (1970)
D. Atkinson et R.L. Warnock, Phys. Rev. 188, 2098 (1969)
J. Kupsch, Nucl. Phys. B11, 573 (1969) ; B12, 155 (1969)
Nuovo Cimento 66A, 202 (1970) ; Comm. Math. Phys. 19, 65 (1970)

15- S. Weinberg, Phys. Rev. Letters 17, 616 (1966)
J. Iliopoulos, Nuovo Cimento 52A, 192 (1967) ; 53A, 552 (1968)
D. Morgan et G. Shaw, Nucl. Phys. B43, 365 (1972)
L. Brown et R. Gobble, Phys. Rev. Letters 20, 376 (1968)
S. Krinsky, Phys. Rev. D2, 1168 (1970)
H. Schnitzer, Phys. Rev. Letters 24, 1384 (1970) ; Phys. Rev. D2, 162 (1970)

16- J.S.Kang et B.W. Lee, Phys. Rev. D3, 2814 (1971)

17- C. Schmid, Phys. Rev. Letters 20, 628 (1968)
C. Lovelace, Phys. Letters 28B, 264 (1968)

18- C. Lovelace, conference on $\pi\pi$ and $K\pi$ interactions, Argonne (1969)
P.N. Dobson Jr, Nuovo Cimento Letters 2, 761 (1969)
K. Kang, Nuovo Cimento Letters 3, 576 (1970)
P. Gensini et G. Soliani, Nuovo Cimento 68A, 293 (1970)
K. Kang, M. Lacombe et R. Vinh Mau, Phys. Rev. D4, 3005 (1971)

19- D. Bessis et M. Pusterla, Nuovo Cimento 54A, 243 (1968)
J.L. Basdevant, D. Bessis et J. Zinn-Justin, Nuovo Cimento 60A, 185 (1969)

20- J. Zinn-Justin, Phys. Rep. 1C, 56 (1971)
J.L. Basdevant, "Padé approximation in strong interaction physics" Proceedings of the 1970 Cargèse Summer school.

21- J.L. Basdevant et J. Zinn-Justin, Phys. Rev. D3, 1865 (1971)

22- J.L. Basdevant et B.W. Lee, Phys. Rev. D2, 1680 (1970)

23- J. Bros, H. Epstein et V. Glaser, Nuovo Cimento 31, 1265 (1964)

24- J. Bros, H. Epstein et V. Glaser, Comm. Math. Phys. 1, 240 (1965)

25- H. Lehmann, Nuovo Cimento 10, 579 (1958)

26- A. Martin, "Scattering Theory : unitarity, analyticity and crossing" Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, New York (1969)

27- A. Martin, Nuovo Cimento 58, 303 (1968) ; 63, 167 (1969)

28- R. Roskies, Phys. Letters 30B, 42 (1969) ; Nuovo Cimento 65A, 467 (1970)

29- A.P. Balachandran et J. Nuyts, Phys. Rev. 172, 1821 (1968)

30- S.M. Roy, Phys. Letters 36B, 353 (1971)

31- B. Bonnier et P. Gauron, Nucl. Phys. B36, 11 (1972)

32- B. Bonnier et P. Gauron, Nucl. Phys. B52, 506 (1973)

33- M.L. Goldberger, Phys. Rev. 99, 979 (1955)

34- K. Symanzik, Phys. Rev. 100, 743 (1957)

35- N.N. Bogolioubov, "Voprossy Teorü Dispersionnykt Sootnoskenü" Moscou (1958)

36- A. Martin, Nuovo Cimento 42, 930 (1966) ; 44, 1218 (1966)

37- J.L. Basdevant, G. Cohen-Tannoudji et A. Morel, Nuovo Cimento 64A, 585 (1969)

38- A. Martin, Nuovo Cimento 44A, 1219 (1966) ; 58A, 303 (1968) 63A, 167 (1969)

39- G. Auberson, O. Brander, G. Mahoux et A. Martin, Nuovo Cimento 65A, 743 (1970)

40- G. Auberson, Nuovo Cimento 68A, 281 (1970)

41- A. Martin, Nuovo Cimento 47A, 265 (1967)

42- A.K. Common, Nuovo Cimento 53A, 946 (1968)

43- J. Baacke et F. Steiner, Fortschr. Phys. 18, 67 (1970)

44- J.L. Basdevant, J.C. Le Guillou et H. Navelet, Nuovo Cimento 7A, 363 (1972)

45- G. Wanders, Nuovo Cimento 63A, 108 (1969)

46- R. Roskies, Phys. Rev. D2, 247 (1970) ; D2, 1649 (1970)

47- B. Bonnier et R. Vinh Mau, Phys. Letters 24B, 9 (1967) ; Phys. Rev. 165, 1923 (1968)

48- O. Piguet et G. Wanders, Nuovo Cimento 56A, 417 (1969)
G. Auberson, O. Piguet et G. Wanders, Phys. Letters 28B, 141(1968)
B. Bonnier, Nucl. Phys. B10, 467 (1969) ; B17, 525 (1970)

49- B. Bonnier et P. Gauron, Nucl. Phys. B21, 465 (1970)
J.C. Le Guillou, A. Morel et H. Navelet, Nuovo Cimento 5A, 659 (1971)

50- C.J. Goebel et G. Shaw, Phys. Letters 27B, 291 (1968)

51- O. Piguet et G. Wanders, Nucl. Phys. B46, 295 (1972)

52- D. Morgan et G. Shaw, Phys. Rev. D2, 520 (1970)

53- W. Zimmermann, Nuovo Cimento 21, 249 (1961)

54- J.L. Basdevant, C.D. Froggat et J.L. Petersen, Phys. Letters B41, 173 (1972)

55- B. Bonnier et J. Procureur, Université de Bordeaux - Preprint PTB-50

56- J.L. Basdevant et F. Hayot, Phys. Letters 36B, 375 (1971)

57- D.Cline, K.J. Braun et F.R. Scherer, Conference on $\pi\pi$ et $K\pi$ interactions, Argonne (1969)

58- J.H. Scharenguivel, L.J. Gutay et D.M. Miller, Nucl. Phys. B22 16 (1970)

LEGENDE DES TABLEAUX

Tableau I — Liste des coefficients $\alpha^{I}_{\ell,n}$ des équations de croisement sur la région non-physique.

Tableaux II et III

a) Liste des contraintes entre les ondes S et D neutres sur la région non-physique.

b) Résultats numériques des contraintes des tableaux IIa et IIIa

Tableaux IV et V

a) Liste des contraintes entre les ondes S et P sur la région non-physique

b) Résultats numériques des contraintes des tableaux IVa et Va.

Tableau VI — Liste des polynômes $W_{in}(v^2)$ (n=1,4) avec leurs comportements à s=0 et s = 4

Liste des coefficients des relations de croisement sur la région non-physique

i	n	$\alpha^{0}_{0,n}$	$\alpha^{2}_{0,n}$	$\alpha^{1}_{1,n}$	$\alpha^{0}_{2,n}$	$\alpha^{2}_{2,n}$
1	0	2	- 5			
2	1	1	2			
3	1	1		2		
4	2	2	- 5		4	- 10
5	2	2	4		5	- 10
6	2	2	- 5	- 6		
7	3	2	- 5		10	25
8	3	1	2		1	2
9	3	2	- 5	15		
10	4	1	2		7	- 14
11	4	8	-20	-27	14	- 35
12	5	1	2		2	4
13	5	10	-25	189	56	-140
14	6	2	- 5	- 9	6	- 15
15	7	1	2		3	6

Tableau I

4.067 $f_2(0.0341)$	< $f_o(3.839)-f_o(0.0341)$	0.01295	0.01357
3.061 $f_2(0.0730)$	> $f_o(3.654)-f_o(0.0730)$	0.00951	0.00933
1.428 $f_2(0.304)$	< $f_o(0.304)-f_o(2.543)$	0.00393	0.00402
1.633 $f_2(0.325)$	> $f_o(0.325)-f_o(2.463)$	0.00445	0.00443
3.061 $f_2(0.589)$	> $f_o(0.237)-f_o(0.589)$	0.00744	0.00483
3.252 $f_2(0.803)$	< $f_o(0.199)-f_o(0.803)$	0.00724	0.00756
1.498 $f_2(0.572)$	< $f_o(0.572)-f_o(1.087)$	0.00367	0.00415
2.050 $f_2(0.572)$	> $f_o(0.572)-f_o(1.294)$	0.00502	0.00494
3.267 $f_2(0.747)$	< $f_o(3.052)-f_o(0.747)$	0.00744	0.00746
3.061 $f_2(0.826)$	> $f_o(2.953)-f_o(0.826)$	0.00675	0.00673
1.620 $f_2(2.288)$	< $f_o(2.288)-f_o(1.244)$	0.00145	0.00222
1.929 $f_2(2.288)$	> $f_o(2.288)-f_o(1.091)$	0.00172	0.00160
1.633 $f_2(2.857)$	> $f_o(2.857)-f_o(0.377)$	0.00072	0.00052
1.630 $f_2(3.102)$	< $f_o(3.102)-f_o(0.296)$	0.00046	0.00271
3.066 $f_2(3.106)$	< $f_o(0.0619)-f_o(3.106)$	.00086	00134
3.061 $f_2(3.536)$	> $f_o(0.0322)-f_o(3.536)$	.00025	00583

Tableau II a

Tableau II b

$$d_1 = f_o(0.185) - f_o(1.168)$$
$$d_2 = f_o(3.390) - f_o(0.048)$$
$$d_3 = f_o(3.770) - f_o(0.0758)$$
$$d_4 = f_o(0.0871) - f_o(2.737)$$
$$d_5 = f_o(0.537) - f_o(2.368)$$
$$d_6 = f_o(3.904) - f_o(0.00663)$$

$$3.163\, f_2(1.168) + 1.347\, f_2(0.185) < d_1 < 3.169\, f_2(1.168) + 1.422\, f_2(0.185)$$
$$3.147\, f_2(0.408) + 1.632\, f_2(3.390) < d_2 < 3.492\, f_2(0.408) + 1.632\, f_2(3.390)$$
$$3.896\, f_2(0.075) + 1.633\, f_2(3.770) < d_3 < 4.391\, f_2(0.075) + 1.633\, f_2(3.770)$$
$$1.303\, f_2(0.087) + 3.073\, f_2(2.737) < d_4 < 1.380\, f_2(0.087) + 3.073\, f_2(2.737)$$
$$1.494\, f_2(0.537) - 1.623\, f_2(2.363) < d_5 < 1.510\, f_2(0.537) - 1.622\, f_2(2.363)$$
$$4.347\, f_2(0.006) - 3.016\, f_2(3.904) < d_6 < 6.503\, f_2(0.06) - 3.061\, f_2(3.904)$$

Tableau III a

D_1	d	D_2
0.01002	0.01004	0.01017
0.00849	0.00925	0.00940
0.01120	0.01238	0.01365
0.00564	0.00574	0.00587
0.00236	0.00242	0.00241
0.01410	0.01517	0.02110

Tableau III b

$$\Delta = A\, f_o^o(4) + B\, f_o^2(4) - a\, f_o^o(0) - b\, f_o^2(0) - c\, f_1^1(0) > 0$$

a	b	c	A	B
1/3	2/3	0	1/3	2/3
1/3	2/3	-12/5	3/5	0
1	-1	-27/5	3/5	0
1	-1	0	0	3/2
1/2	1/4	9/4	0	3/2

Tableau IV.a

Δ
0.0204
0.0234
0.0247
0.0180
0.0170

Tableau IV.b

$$\Delta_1 = A'\, f_o^o(0) + B'\, f_o^2(0) - \frac{1}{4}\int_0^4 ds \left\{ a f_o^o(s) + b f_o^2(s) + c f_1^1(s) \right\} > 0$$

$$\Delta_2 = A'\, f_o^o(0) + B'\, f_o^2(0) + f_1^1(0) - \frac{1}{8}\int_0^4 ds \left\{ a f_o^o(s) + b f_o^2(s) + c f_1^1(s) \right\} s > 0$$

a	b	c	A'	B'	C'
1/3	2/3	0	1/3	2/3	0
1/3	2/3	-12/5	1/15	4/3	2/5
1	-1	-27/5	-3/5	3	-3/5
1	-1	0	0	3/2	-3/2
1/2	1/4	9/4	1/2	1/4	-3/4

Tableau IV.a

Δ_1	Δ_2
0.0065	0.0036
0.0068	0.0037
0.0079	0.0044
0.0070	0.0041
0.0063	0.0036

Tableau IV.b

$$\Delta_1 = f_0^0(s) - f_0^2(s) + 9\cos\theta_s\, f_1^1(s)$$

$$\Delta_2 = f_0^0(t) - f_0^2(t) - 9\cos\theta_t\, f_1^1(t) \qquad \Delta_1 > \Delta_2$$

s	t	cos θ_s	cos θ_t	Δ_1	Δ_2
0.2389	1.8806	0	-0.7746	-0.13679	-0.14682
0.3805	1.8098	0	-0.6526	-0.12266	-0.13078
0.2937	2.4226	-0.3073	-0.6276	-0.00431	-0.01150
0.1737	2.4584	-0.2850	-0.7746	-0.02144	-0.03052
3.8007	0.0997	0	0.9489	0.28117	0.26332
3.3719	0.3140	0	0.8296	0.22028	0.21168
2.6880	1.0034	-0.5296	0.7940	0.21242	0.20691
3.6985	0.2365	-0.5685	0.9654	0.28598	0.26843

$$\Delta_1 = f_0^0(s) - f_0^2(s) + 3\cos\theta_s\, f_1^1(s) \qquad \text{I)}\ \Delta_1 > \Delta_2$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{3} f_0^0(t) + \frac{2}{3} f_0^2(t) - 6\cos\theta_t\, f_1^1(t) \qquad \text{II)}\ \Delta_1 < \Delta_2$$

	s	t	cos θ_s	cos θ_t	Δ_1	Δ_2
I	0.2389	1.8806	0	-0.7746	-0.13679	-0.14640
	0.3578	1.8211	0	-0.6716	-0.12494	-0.13311
	0.1982	2.9529	-0.5534	-0.6214	-0.06252	-0.06412
	0.1103	3.0212	-0.5534	-0.7746	-0.06924	-0.07151
	3.6564	0.1718	0	0.9102	0.25975	0.24667
	3.3719	0.3140	0	0.8296	0.22028	0.21224
	2.6097	1.0873	-0.5642	0.7920	0.15331	0.14887
	3.3887	0.4803	-0.5716	0.9256	0.23608	0.22455
II	2.2317	0.3505	0.6035	0.2230	-0.04485	-0.03818
	2.2834	0.1935	0.7746	0.1997	-0.04344	-0.03429
	1.8806	0.2389	0.7746	0	0.01391	0.02364
	1.7874	0.4252	0.6156	0	0.01670	0.02363
	0.9459	2.7419	-0.7956	0.5038	-0.03146	-0.02584
	0.3140	3.3719	-0.8296	0	0.00755	0.01565

Tableau Va

Tableau Vb

Liste des Polynomes

$W_{2N}(v^2)$

N	$W_{2N}(v^2)$ $v = -i\mathrm{Log}\,\frac{\sqrt{s}+\sqrt{s-4}}{2}$	W_{2N} au voisinage de $s = 0$; $x=\frac{\sqrt{s}}{2}$	W_{2N} au voisinage de $s=4$ $y = \frac{s-4}{4}$
1	v^2	$-\pi\left\{ x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\frac{5x^7}{112}\right\}$	$-y + \frac{y^2}{3} - \frac{8}{45}y^3$
2	$v^4 - \frac{\pi^2}{2}v^2$	$-2\pi\left\{x^3+\frac{x^5}{2}+\frac{35x^7}{120}\right\}$	$\frac{\pi^2}{2}y+(1-\frac{\pi^2}{6})y^2+(\frac{4\pi^2}{45} - \frac{2}{3})y^3$
3	$v^6 - \frac{5\pi^2}{4}v^4 + \frac{7\pi^4}{16}v^2$	$-3\pi\left\{x^5 + \frac{5}{6}x^7\right\}$	$\frac{7\pi^4}{16}y + (\frac{7\pi^4}{48} - \frac{5\pi^2}{4})y^2$ $+ (\frac{5\pi^2}{6} - \frac{7\pi^4}{10} - 1)y^3$
	$v^8 - \frac{7\pi^2}{3}v^6+\frac{49\pi^4}{24}v^4$ $- \frac{31\pi^2}{48}v^2$	$-4\pi x^7$	$\frac{31\pi^6}{48}y+(\frac{49\pi^4}{24} - \frac{31\pi^6}{144})y^2$ $+(\frac{7\pi^2}{3} - \frac{49\pi^4}{36} + \frac{31\pi^6}{270})y^3$

Tableau VI

LEGENDE DES FIGURES

Fig.1 - Faisceaux des déphasages des ondes S et P correspondant aux solutions du premier modèle.

Fig.2 - Déphasages des ondes S et P correspondant à la solution particulière choisie dans l'ensemble des solutions de la figure 1.
Les résultats numériques des tableaux IIb à Vb correspondent à cette solution.

Fig.3 - Comportement sur la région non-physique de l'onde S neutre correspondant à la solution de la figure 2.

Fig.4 - Comportement sur la région non-physique des amplitudes S et P de la solution de la figure 2.

Fig.5 - Comportement sur la région non-physique des ondes D de la solution de la figure 2.
Les flèches indiquent les bornes supérieures et inférieures imposées à l'onde D neutre par les contraintes du tableau II.

Fig.6 - Contributions asymptotiques $\rho_\ell^{I}(s)$ aux ondes S et P.

Fig.7 - a - Ensemble de déphasages des ondes S et P sélectionné dans notre premier modèle. $a_o^o=0.18$, $a_o^2=-0.08$

- b - Résultats du test de croisement sur les déphasages de la figure 7a.

Les courbes I représentent les parties réelles des amplitudes S(I=0) et S(I=2) données par le modèle.

Les courbes O représentent les parties réelles des mêmes ondes S(I=0,2) données par les équations de croisement sur la région physique.
Les courbes U représentent les bornes de l'unitarité

Fig.8 - a - Déphasages des ondes S et P de la solution centrale de Le Guillou, Morel et Navelet. (a_o^o=0.206, a_o^2=-0.073)

- b - Résultats du test de croisement sur les déphasages de la figure 8-a.

Fig.9 - a - Déphasages du modèle 3. Les solutions 1 et 2 sont toutes deux associées aux longueurs de diffusion a_o^o=0.186, a_o^2=-0.045

- b,c,d,e - Résultats du test de croisement sur les déphasages de la figure 9a.
  - b) solution 1
  - c) solution 2
  - d) solution 1 avec a_o^o=0.15, a^2=-0.045
  - e) solution 2 avec a_o^o=0.16, a_o=-0.036

Fig.10- a - Déphasages de Morgan et Shaw (Ref.52). Les meilleurs résultats sont toujours obtenus avec la courbe 2 pour δ_o^2

- b,c,d,e - Résultats du test de croisement sur les déphasages de la figure 10-a
  - b) solution U.D
  - c) solution B.U
  - d) solution B.D.1
  - e) solution B.D.2

Fig.11- a - Déphasages expérimentaux moyens de Baton, Laurens et Reignier (Ref.2)

- b,c,d,e - Résultats du test de croisement sur les déphasages de la figure 11a

b) $\int_0^0$ du type down-down ($a_0^0=0.22$, $a_0^2=-0.036$)

c) $\int_0^0$ du type down-up ($a_0^0=0.20$, $a_0^2=-0.04$)

d) $\int_0^0$ du type down-down ($a_0^0=0.16$, $a_0^2=-0.04$)

e) $\int_0^0$ du type down-up ($a_0^0=0.16$, $a_0^2=-0.04$)

Fig.12- a - Premier ensemble de solutions de notre deuxième étude. Les courbes en pointillé délimitent les solutions sélectionnées à partir des résultats expérimentaux

Baton et al. (Ref.2)

Protopopescu et al. (Ref.3)

Walker et al. (Ref.6)

Colton et al. (Ref.6)

Zylberstein et al. (Ref.5)

- b - Résultats du test d'unitarité sur les déphasages de la figure 12a

Fig.13- a - Deuxième ensemble de solutions de notre deuxième étude

- b - Résultats du test d'unitarité sur les déphasages de la figure 13-a

Fig.14 - Représentation du domaine D (a_0^0, a_0^2, a_1^1).
La contrainte $a_0^0 > -0.3$ est due à Goebel et Shaw (Ref.50)
La contrainte $a_0^0 + 2a_0^2 > -0.3$ est obtenue à partir des déphasages de Baton, Laurens et Reignier (Ref.2).

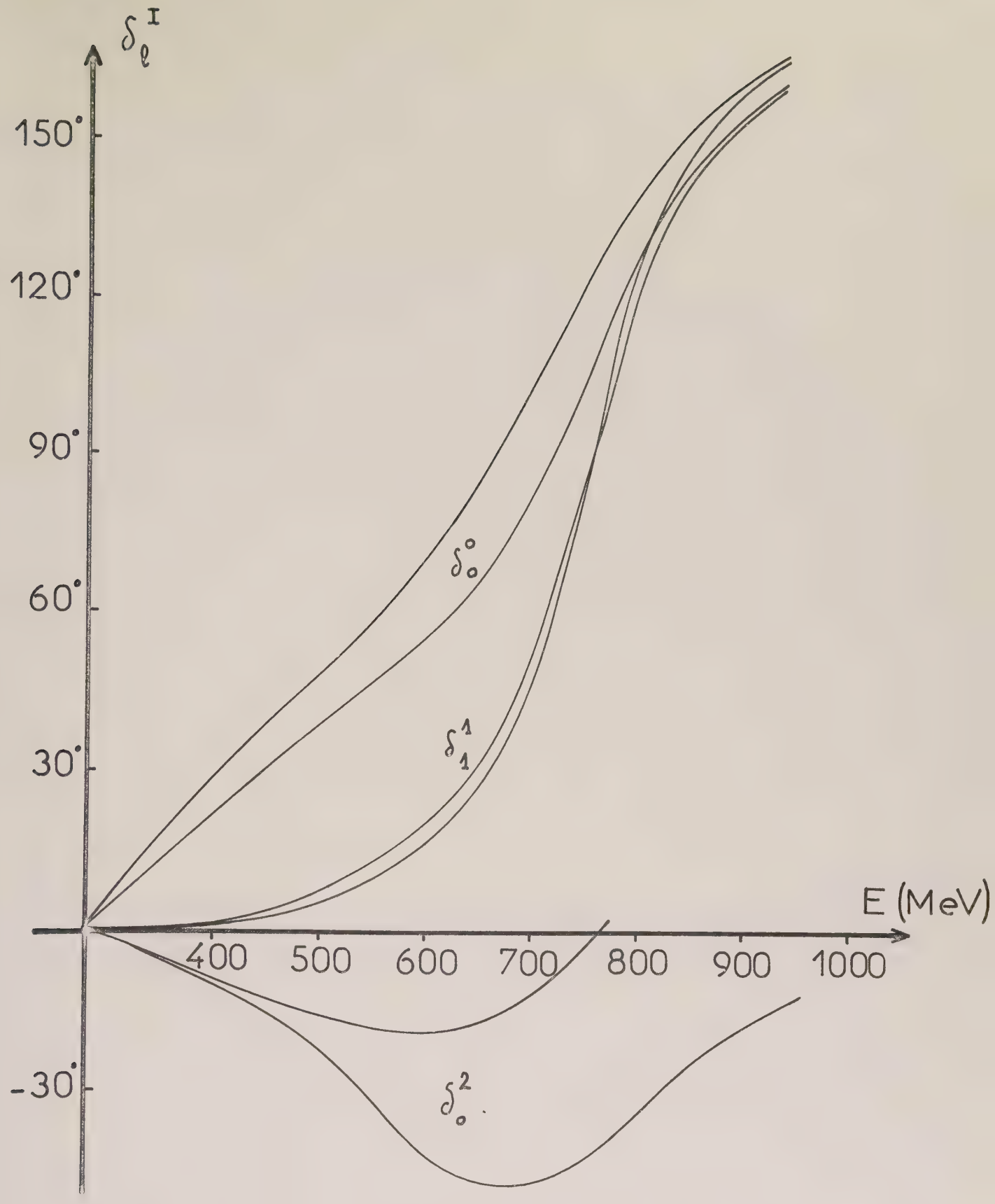

δ_ℓ^I
150°
120°
90°
60°
30°
-30°
δ_0^0
δ_1^1
δ_0^2
E (MeV)
400
500
600
700
800
900
1000

Fig. 1

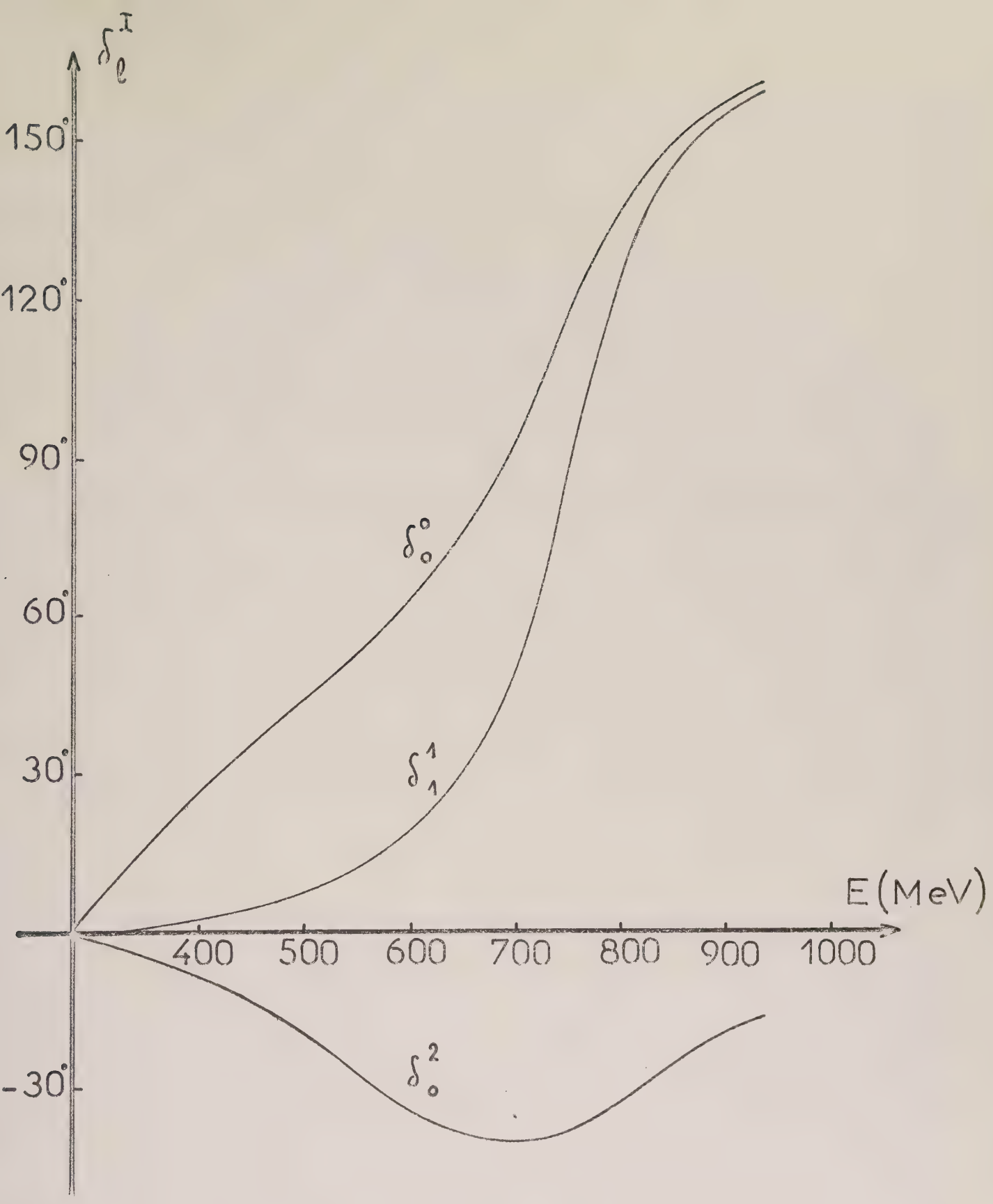

δ_ℓ^I
150°
120°
90°
60°
30°
-30°
δ_0^0
δ_1^1
δ_0^2
E(MeV)
400
500
600
700
800
900
1000

Fig. 2

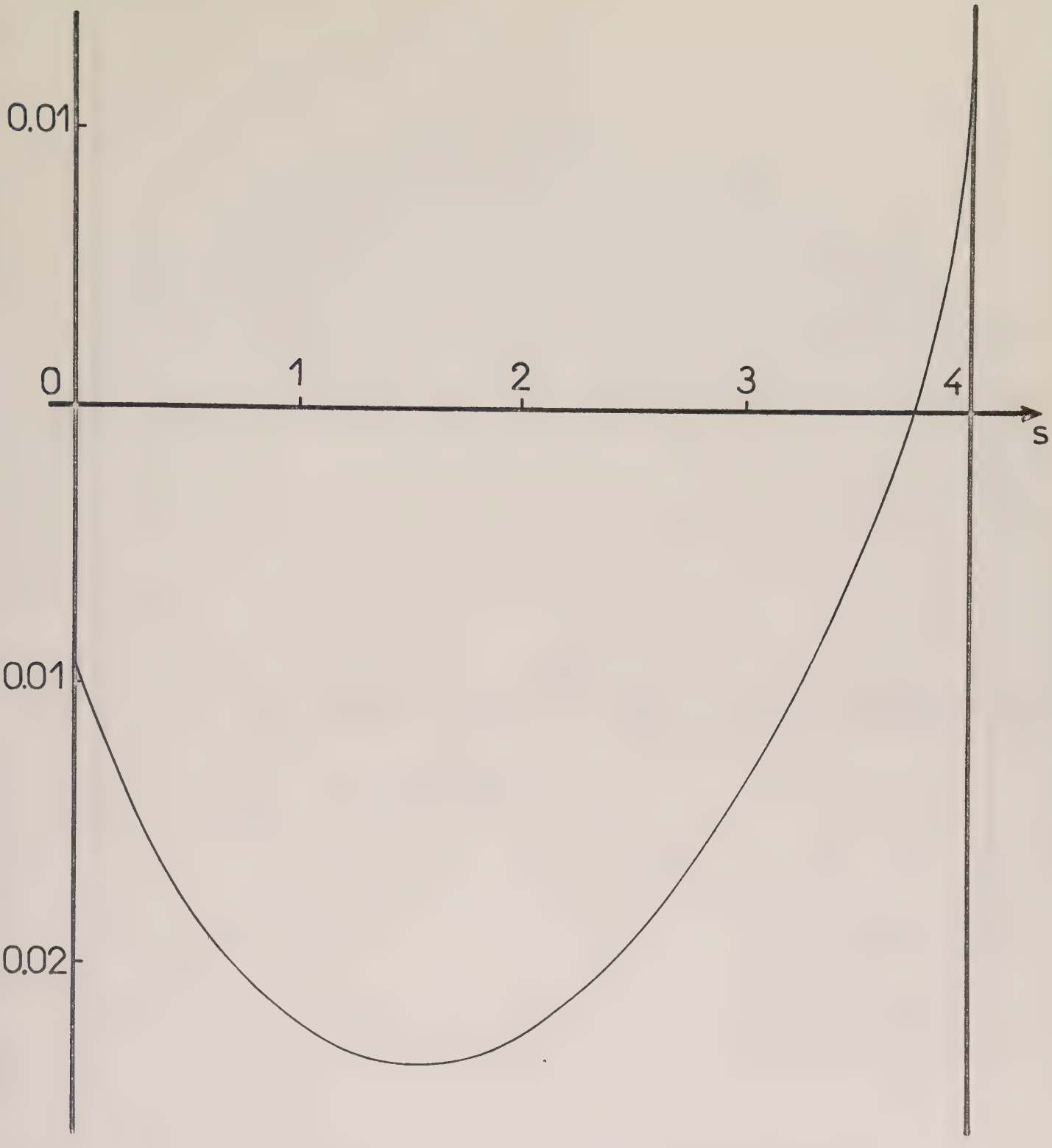


Fig. 3

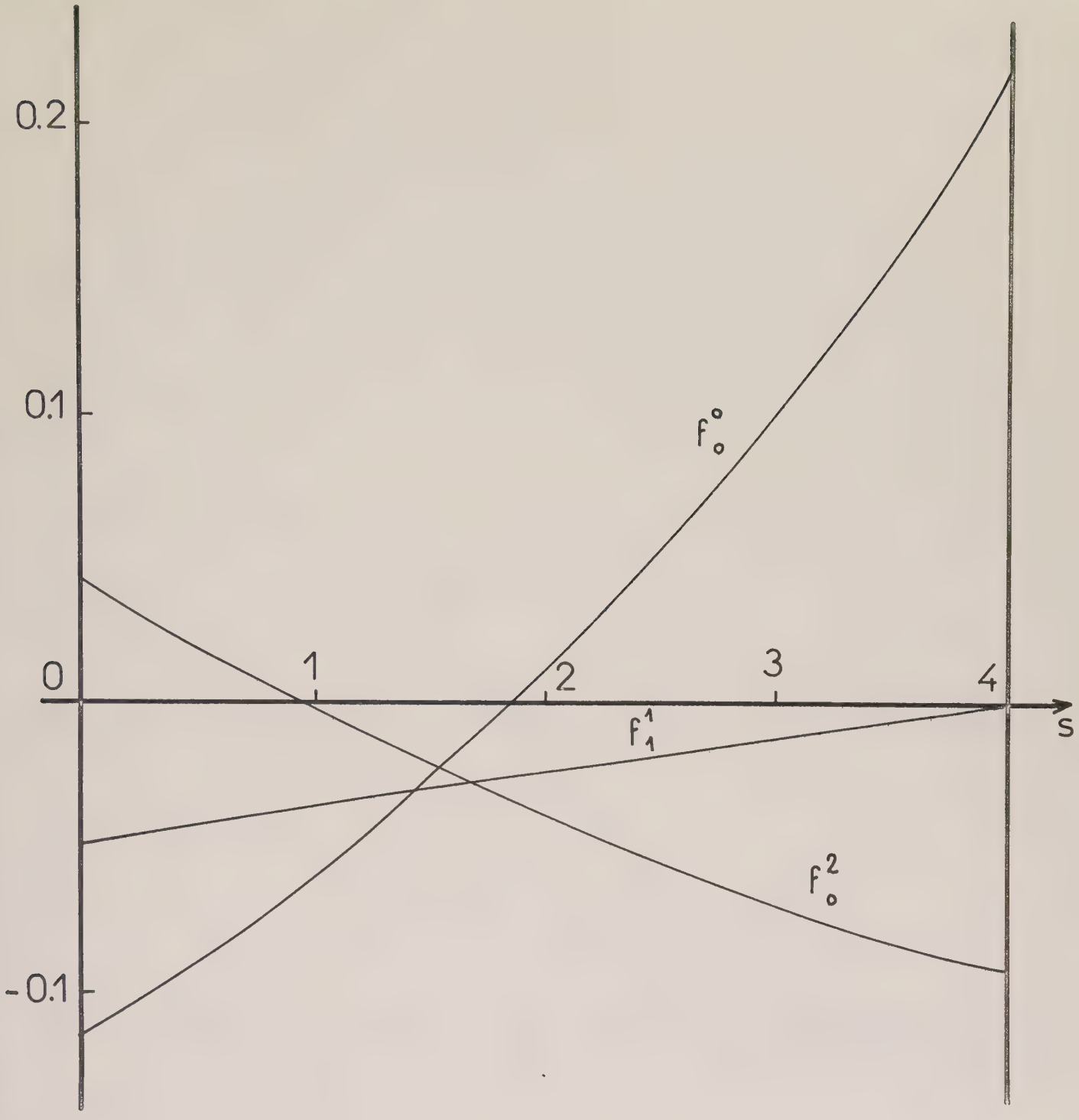


Fig. 4

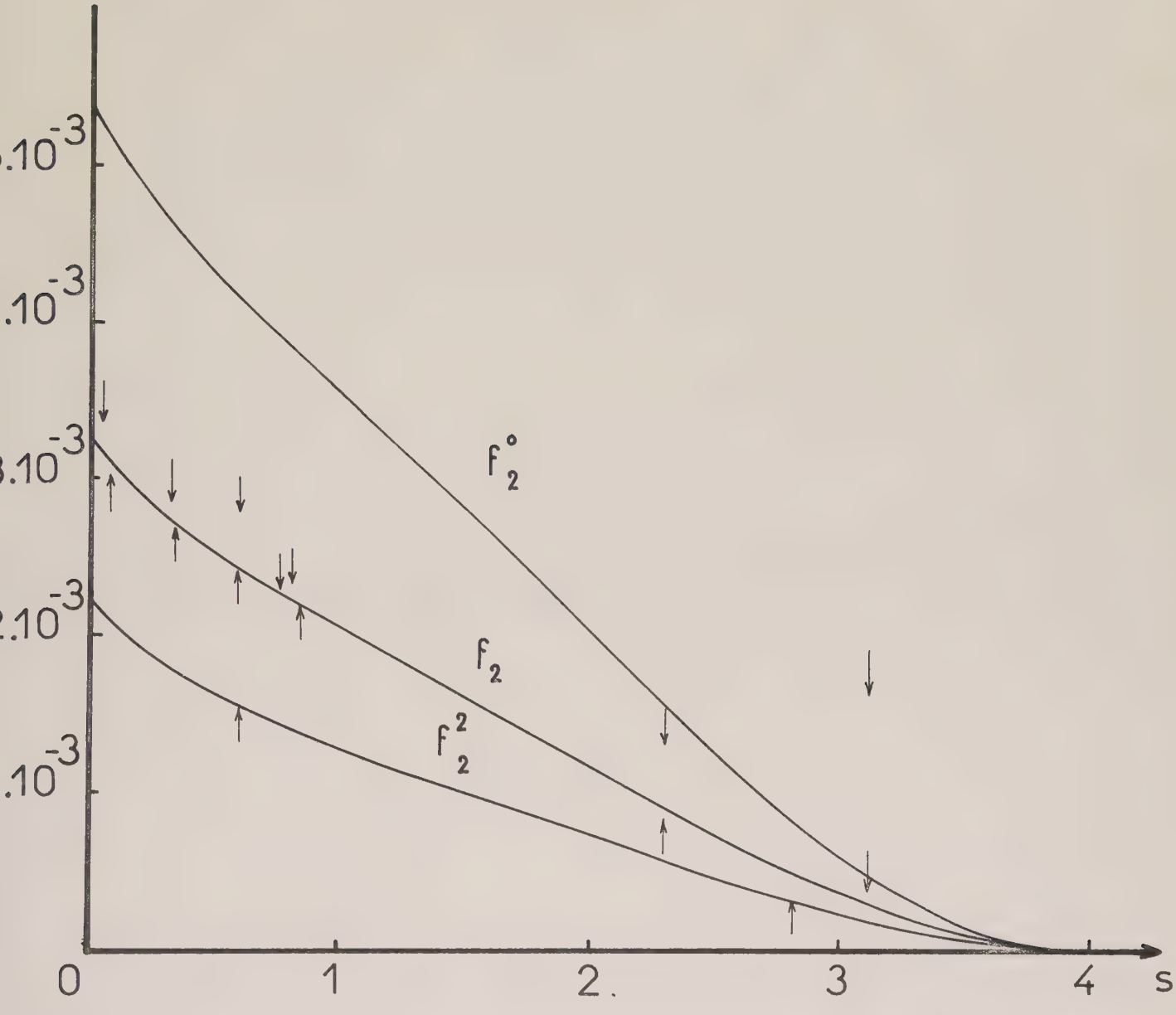


Fig. 5

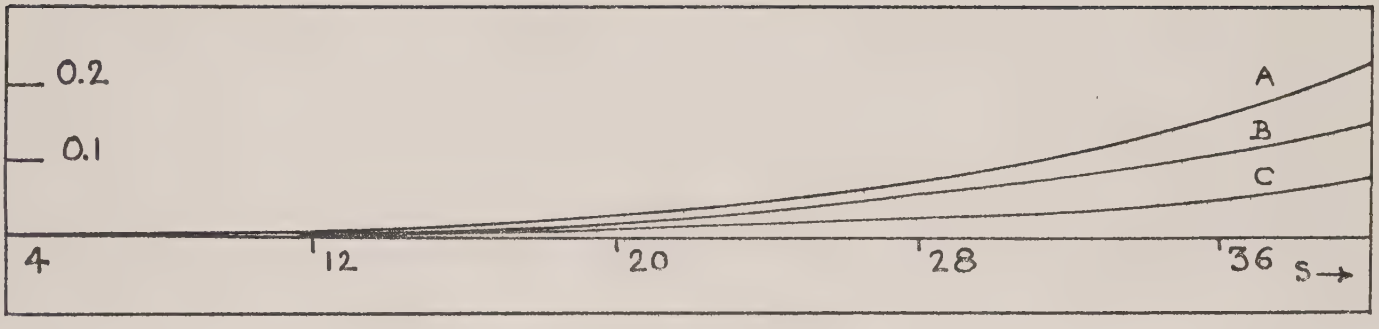


FIG. 6

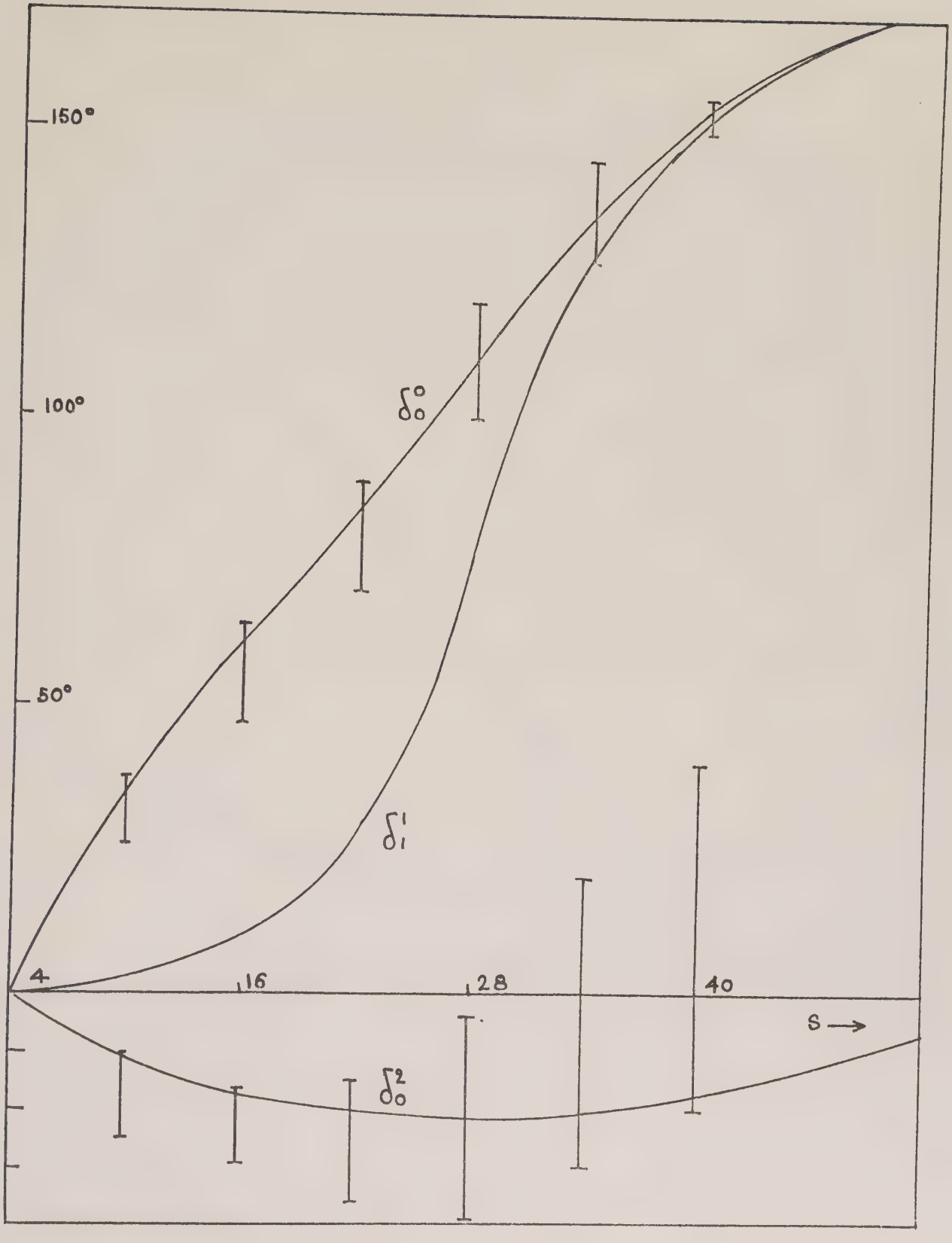


FIG. 7_a

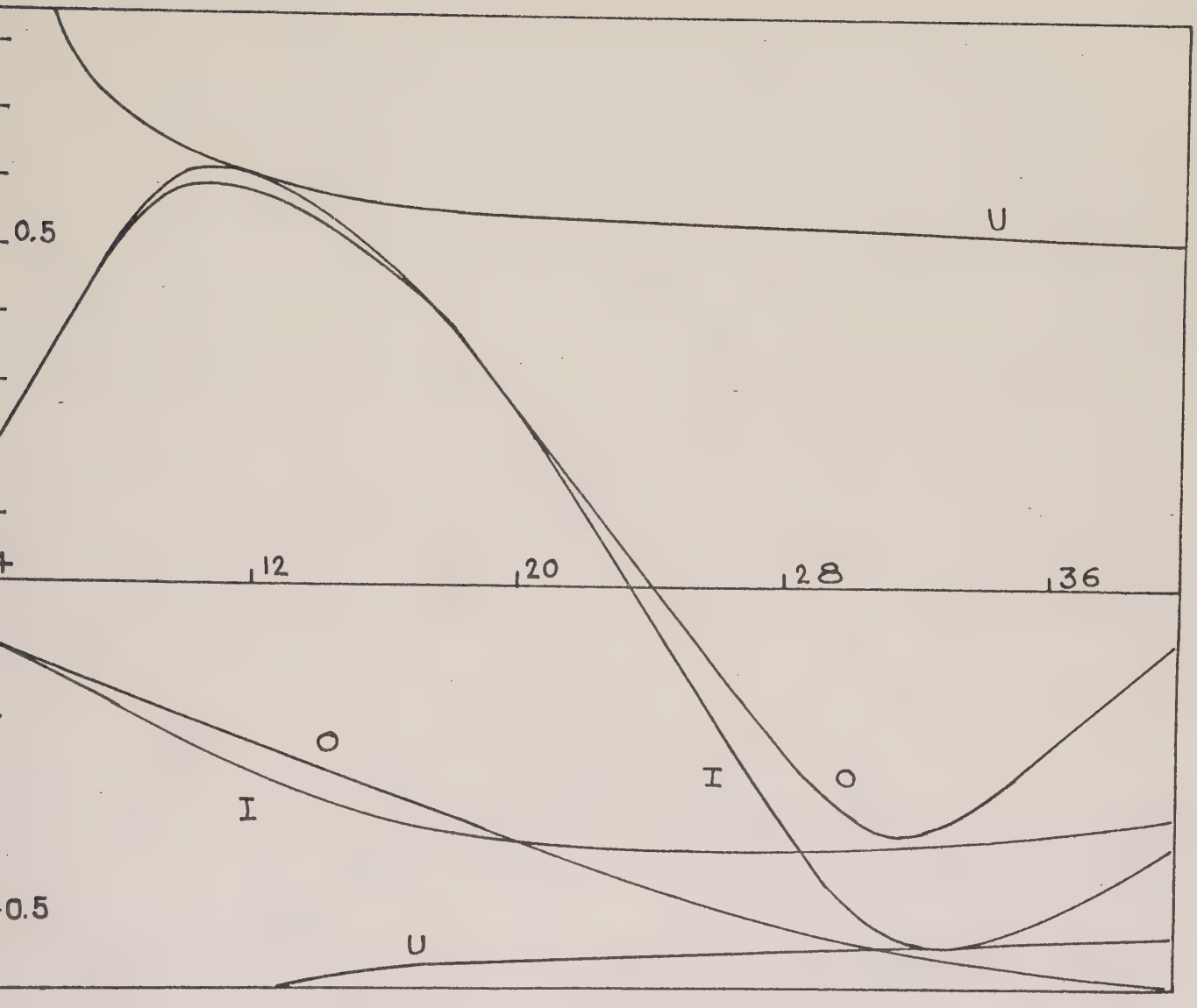


FIG. 7-b

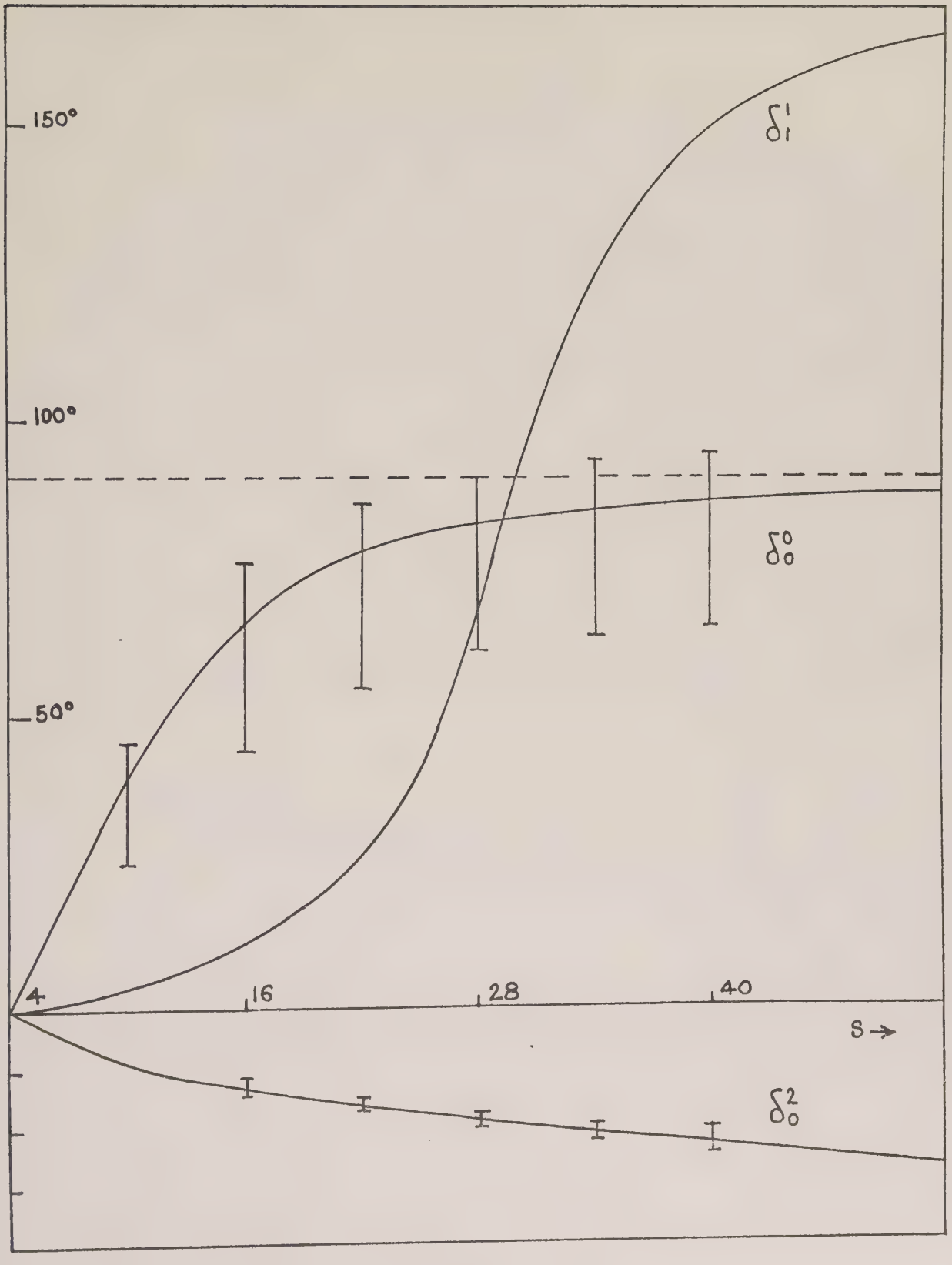


FIG. 8_a

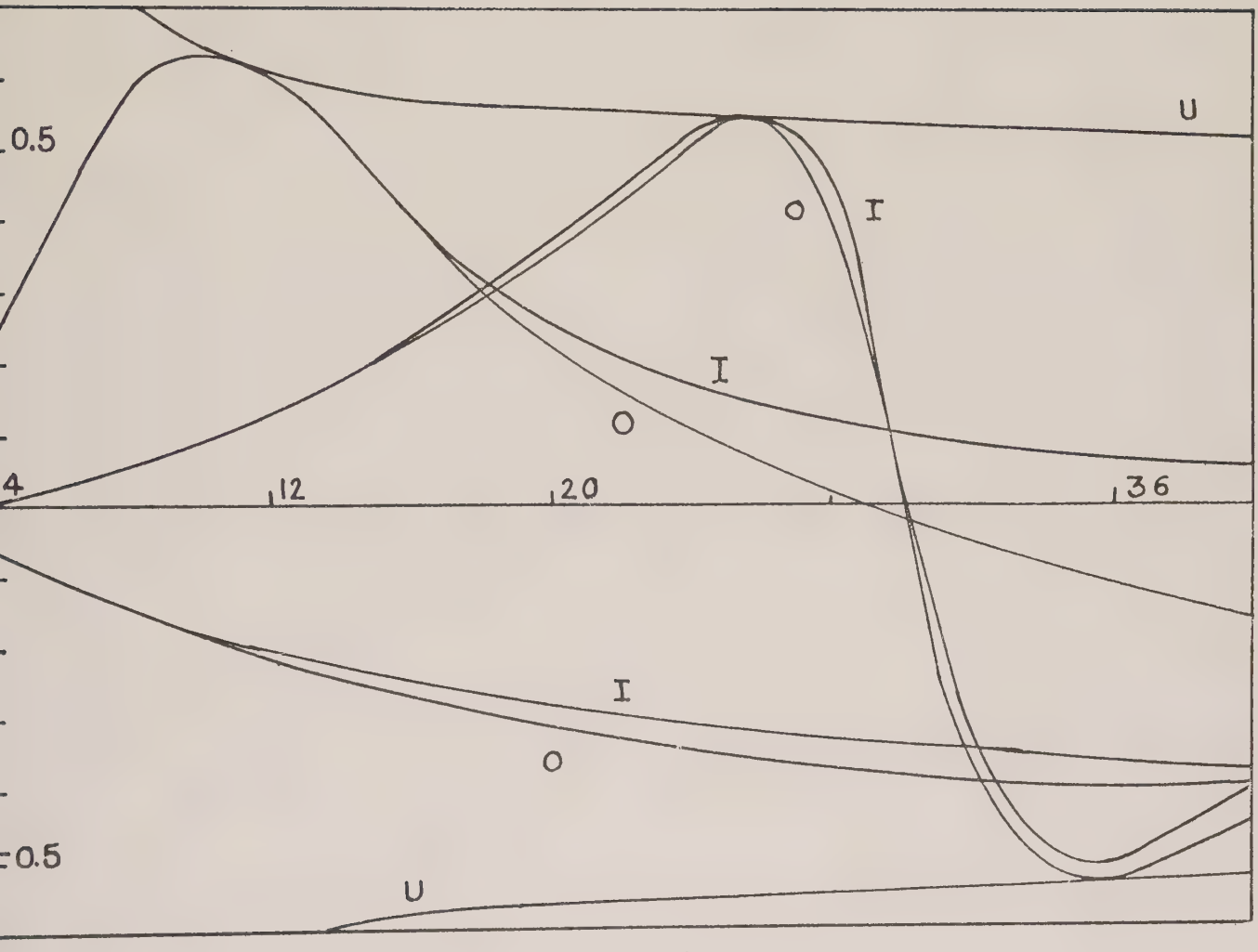


FIG. 8_b

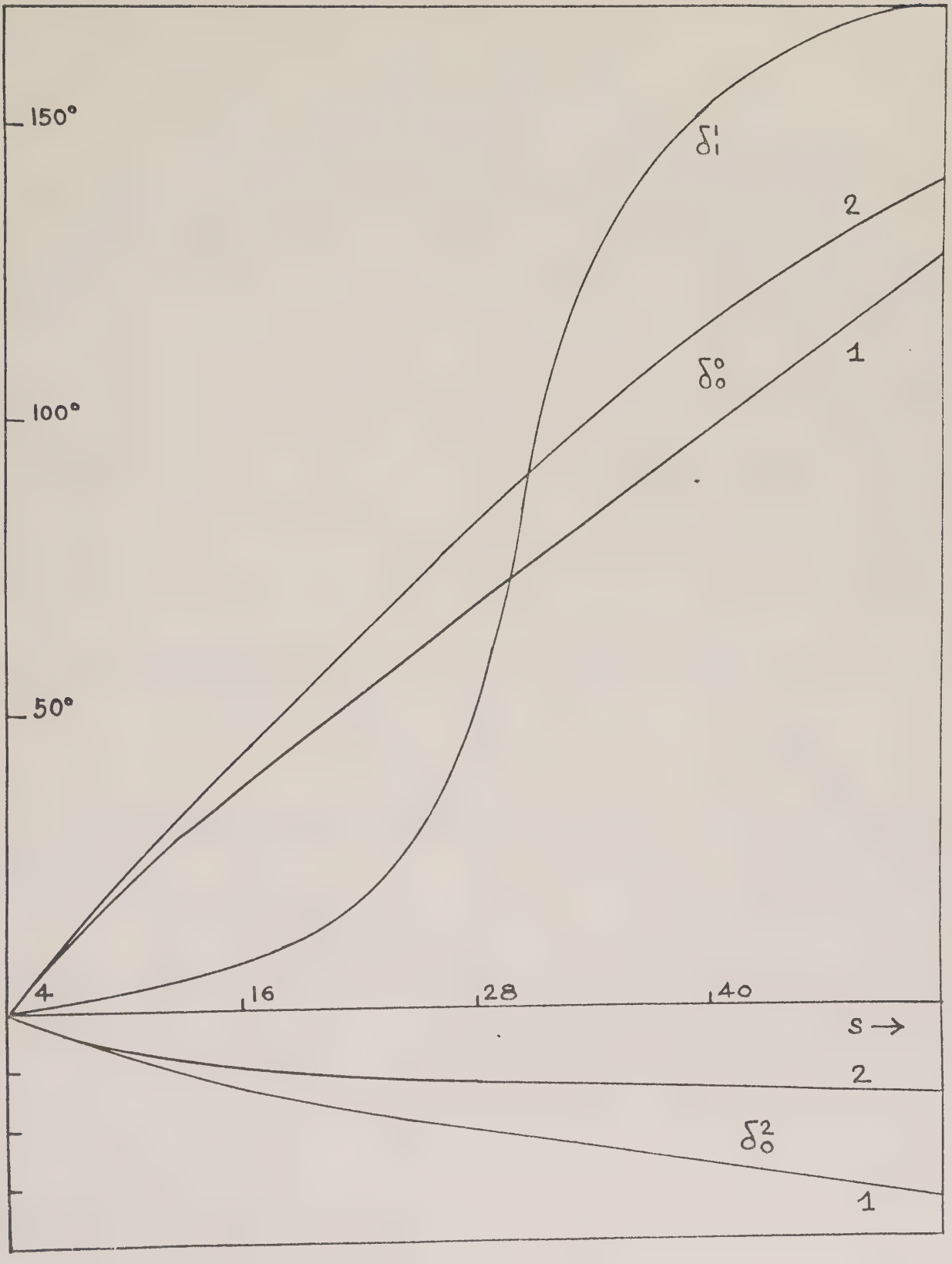


FIG. 9-d

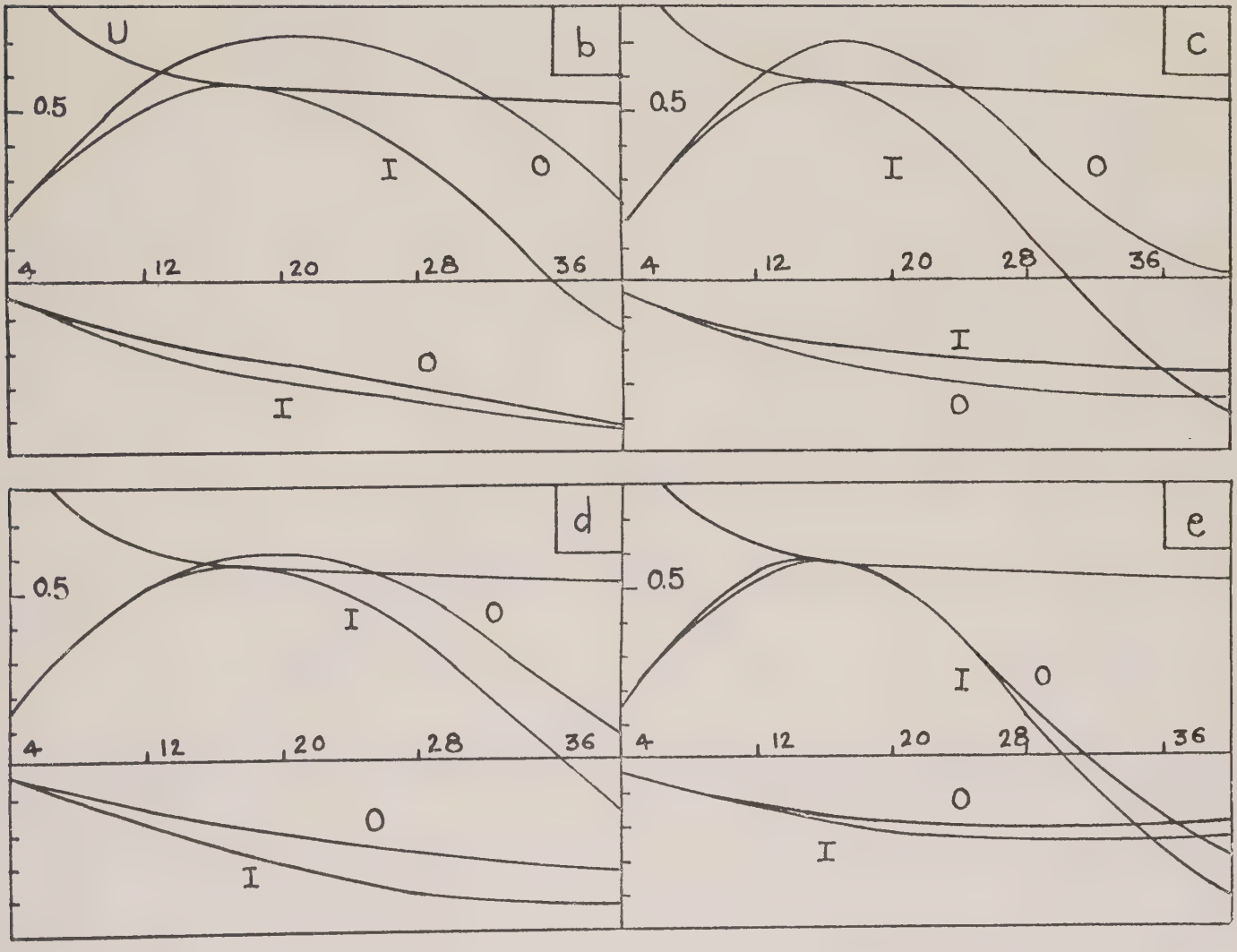

U
b
0.5
I
O
4
12
20
28
36
O
I
c
0.5
I
O
4
12
20
28
36
I
O
d
0.5
I
O
4
12
20
28
36
O
I
e
0.5
I
O
4
12
20
28
36
O
I

FIG. 9_b,c,d,e_

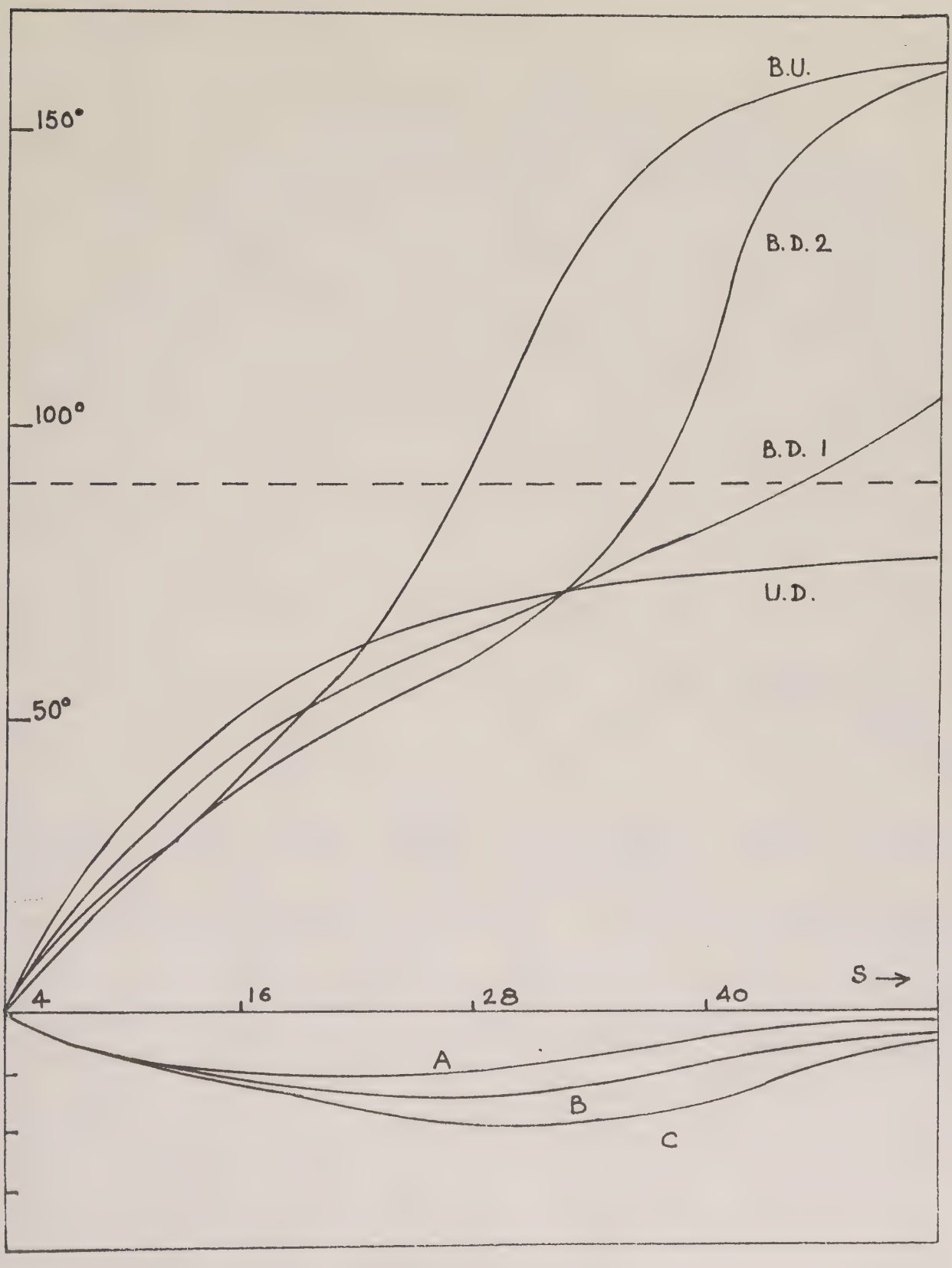
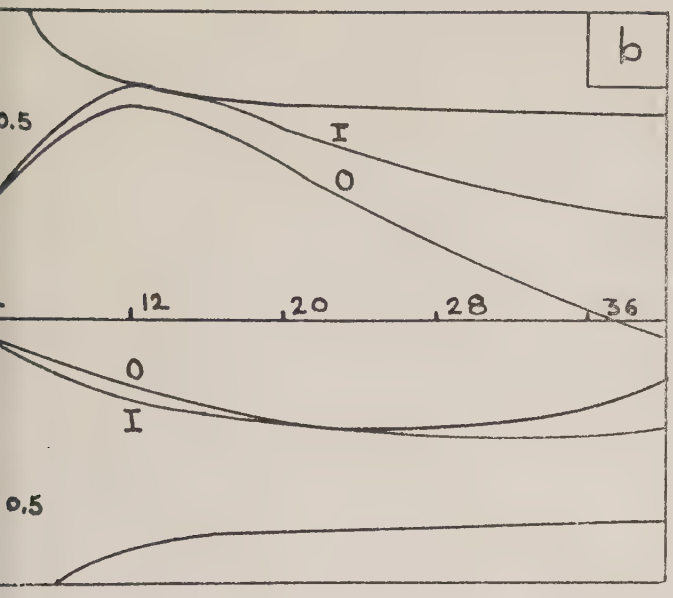
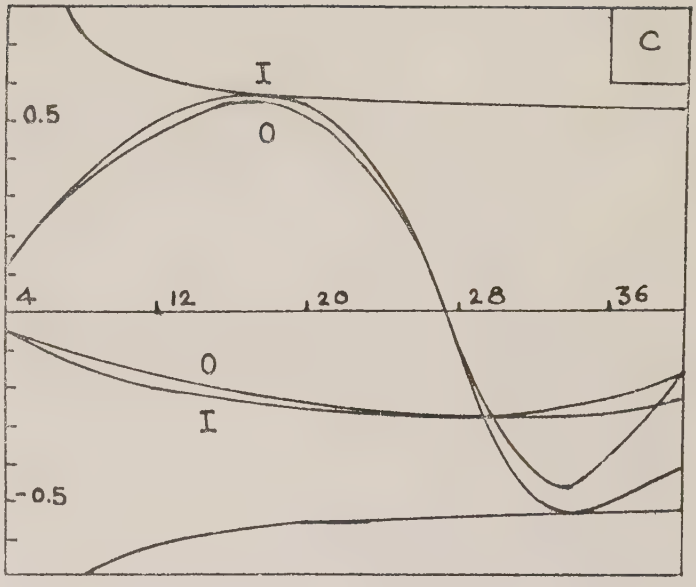
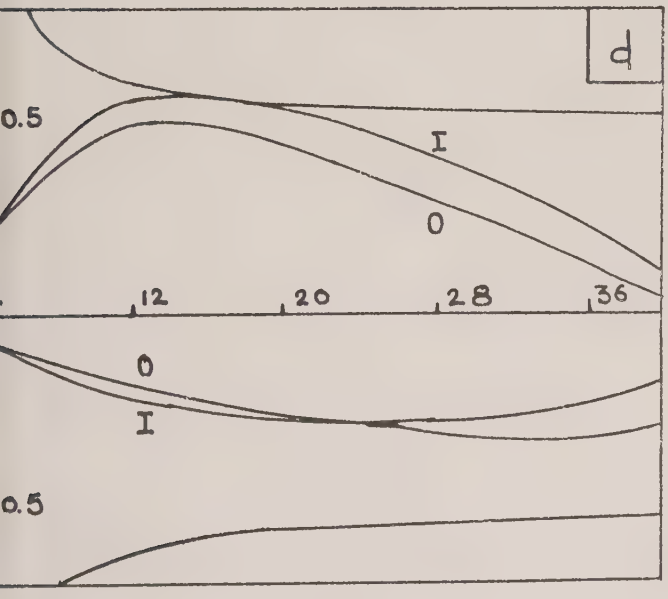
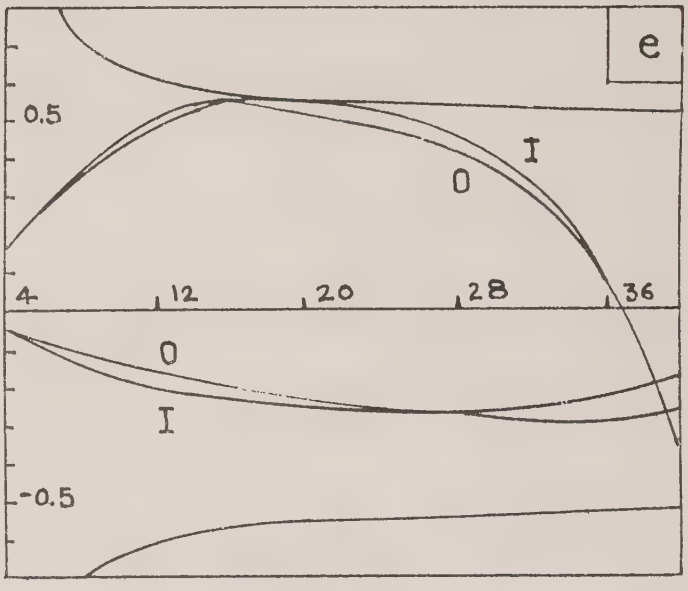


FIG. 10_a

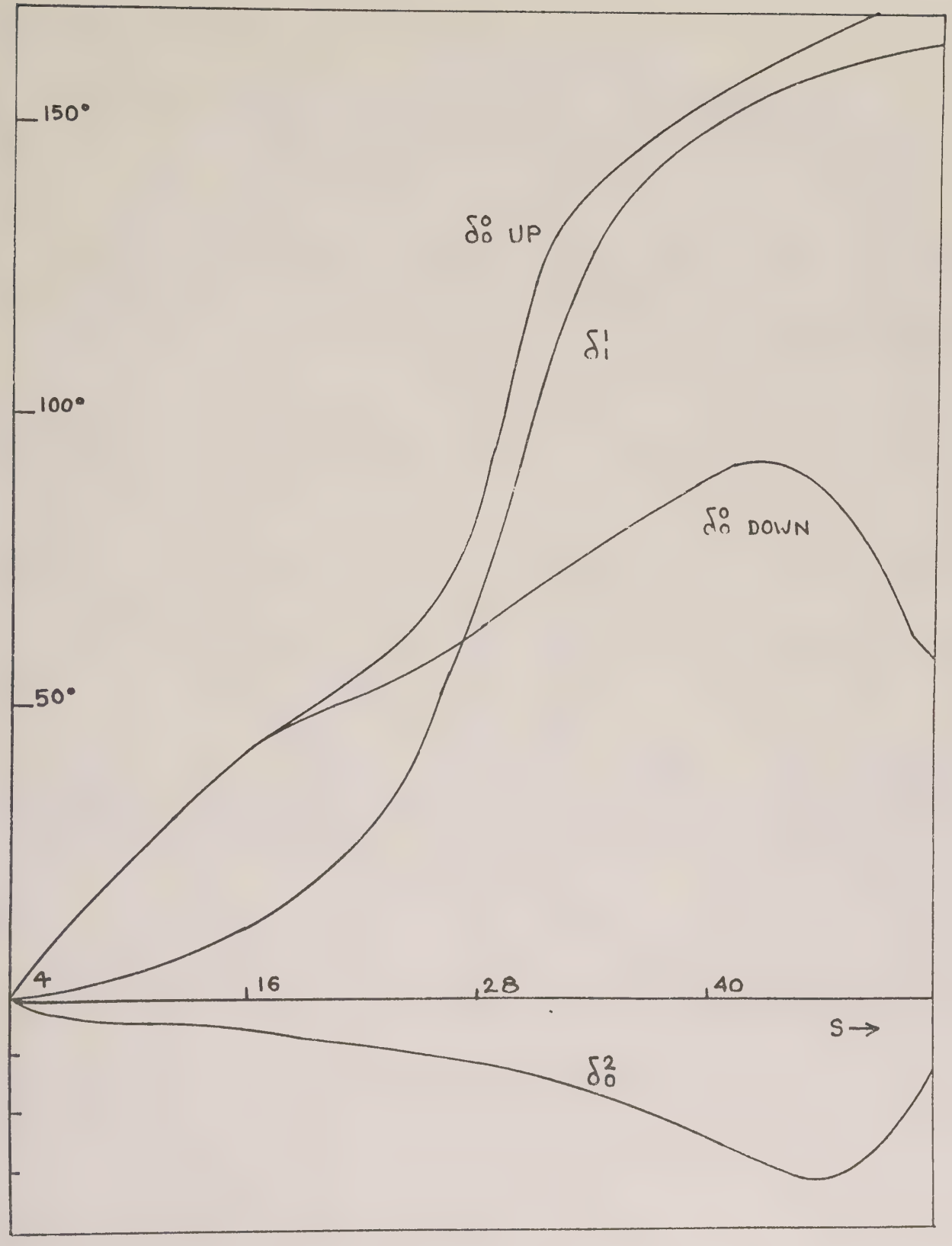

b
0.5
I
0
12
20
28
36
0
I
0.5


c
I
0.5
0
4
12
20
28
36
0
I
-0.5

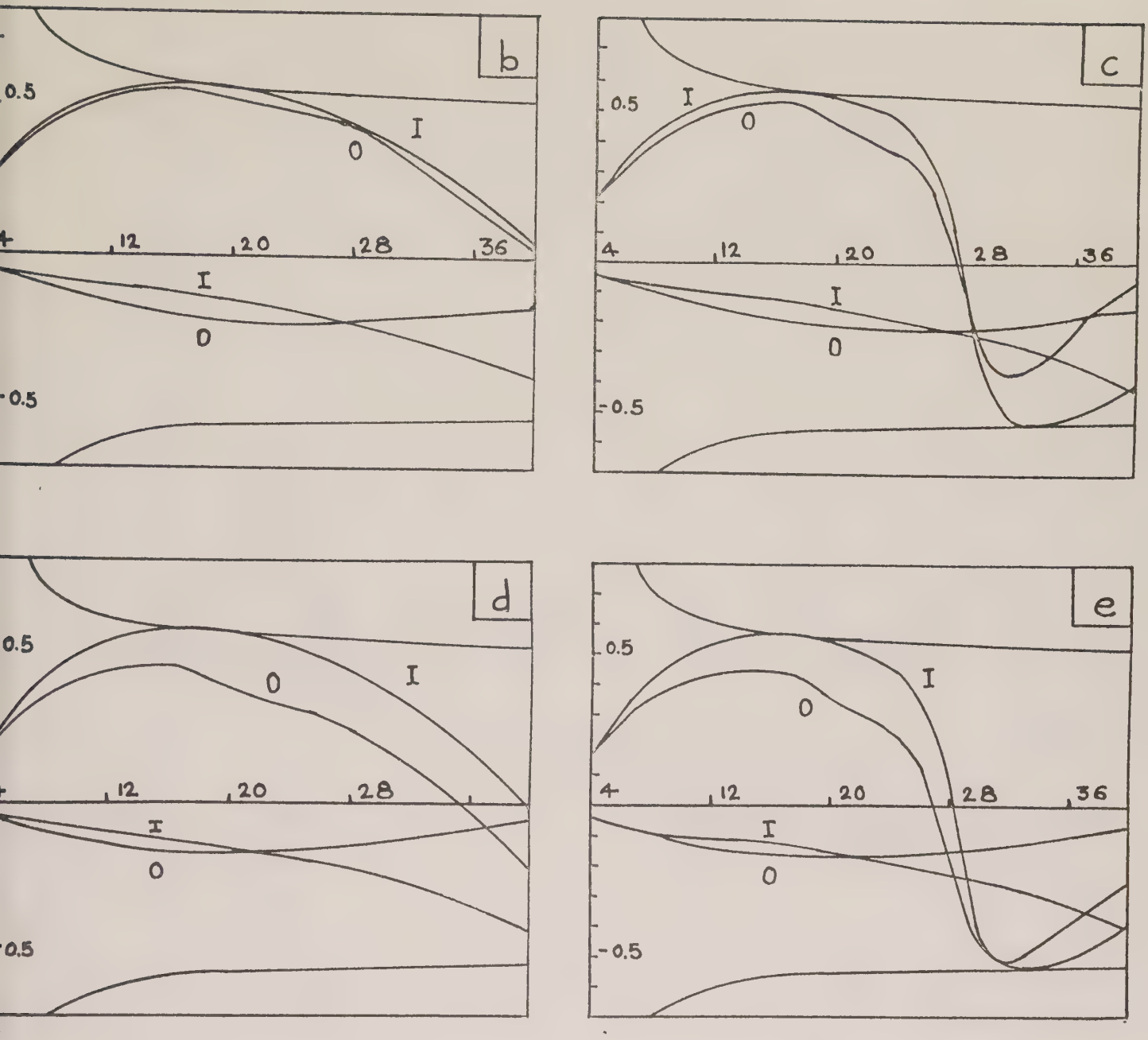

d
0.5
I
0
12
20
28
36
0
I
0.5


e
0.5
I
0
4
12
20
28
36
0
I
-0.5

_ FIG. 10 _ b, c, d, e _


150°
100°
50°
δ_0^0 UP
δ_1^1
δ_0^0 DOWN
4
16
28
40
S →
δ_0^2

- FIG. 11_a -


b
0.5
I
0
4
12
20
28
36
I
0
-0.5
c
0.5
I
0
4
12
20
28
36
I
0
-0.5
d
0.5
0
I
12
20
28
I
0
-0.5
e
0.5
I
0
4
12
20
28
36
I
0
-0.5

_ FIG. 11 _ b, c, d, e _

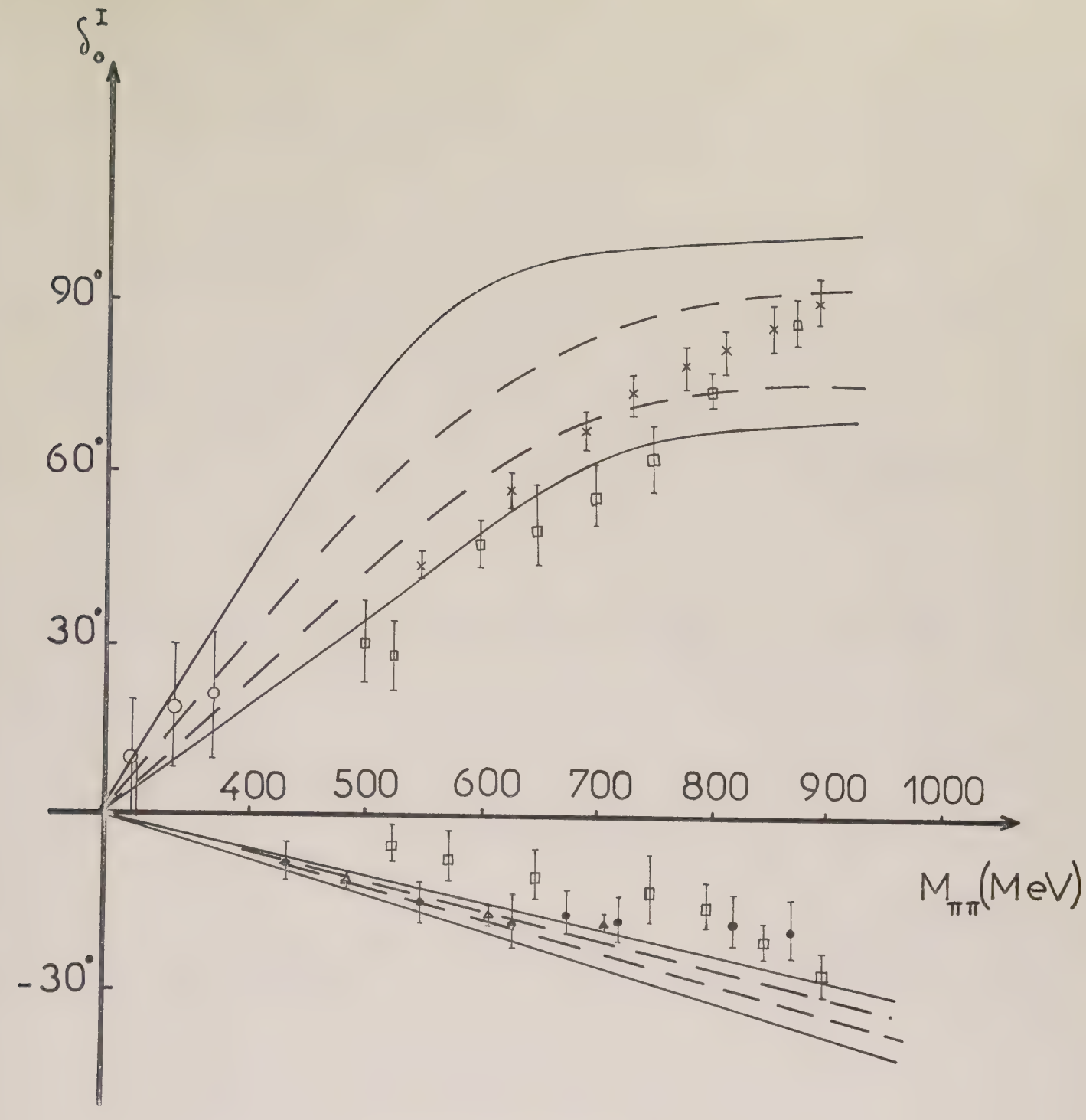


Fig. 12 a

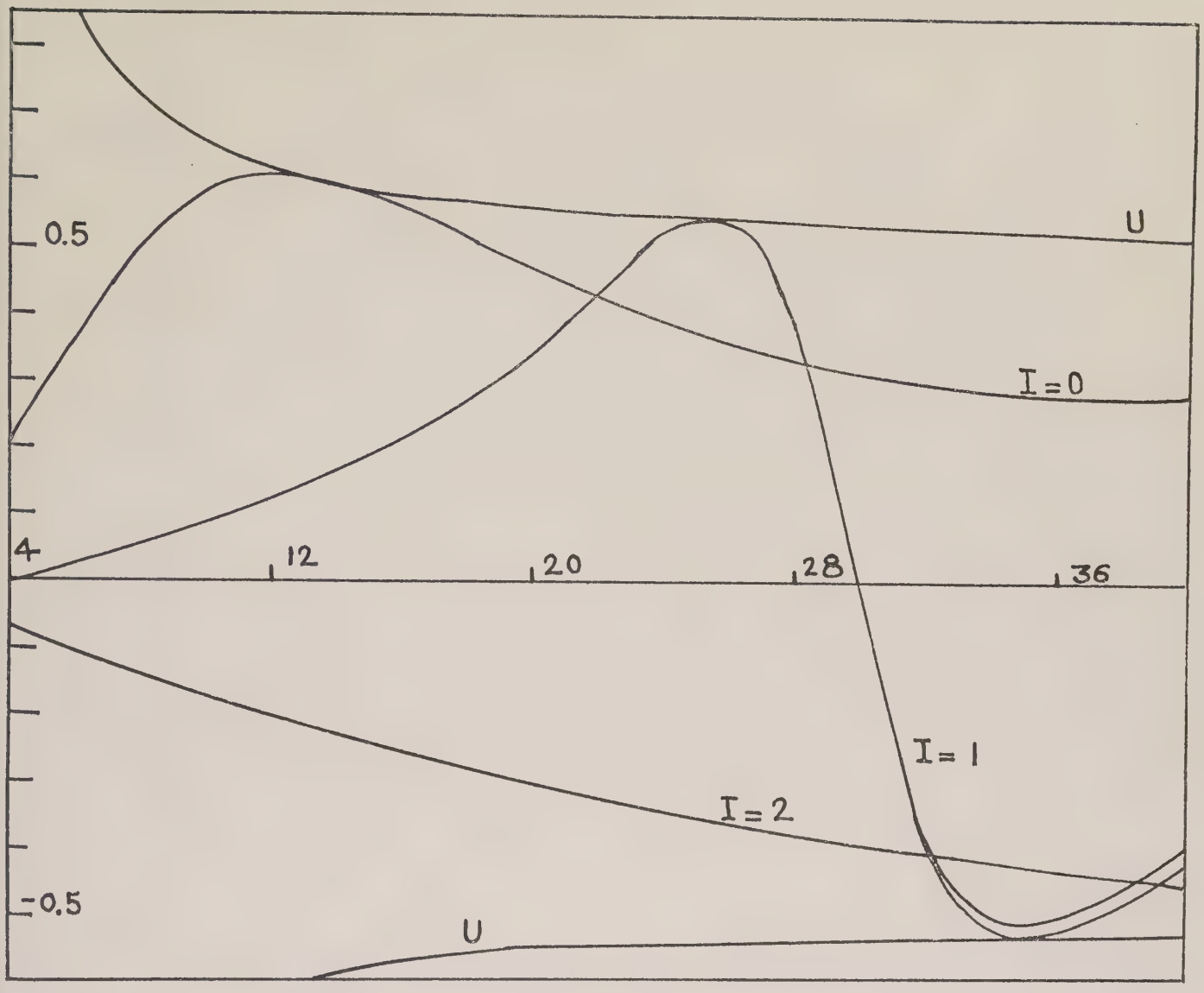


_FIG. 12_b_

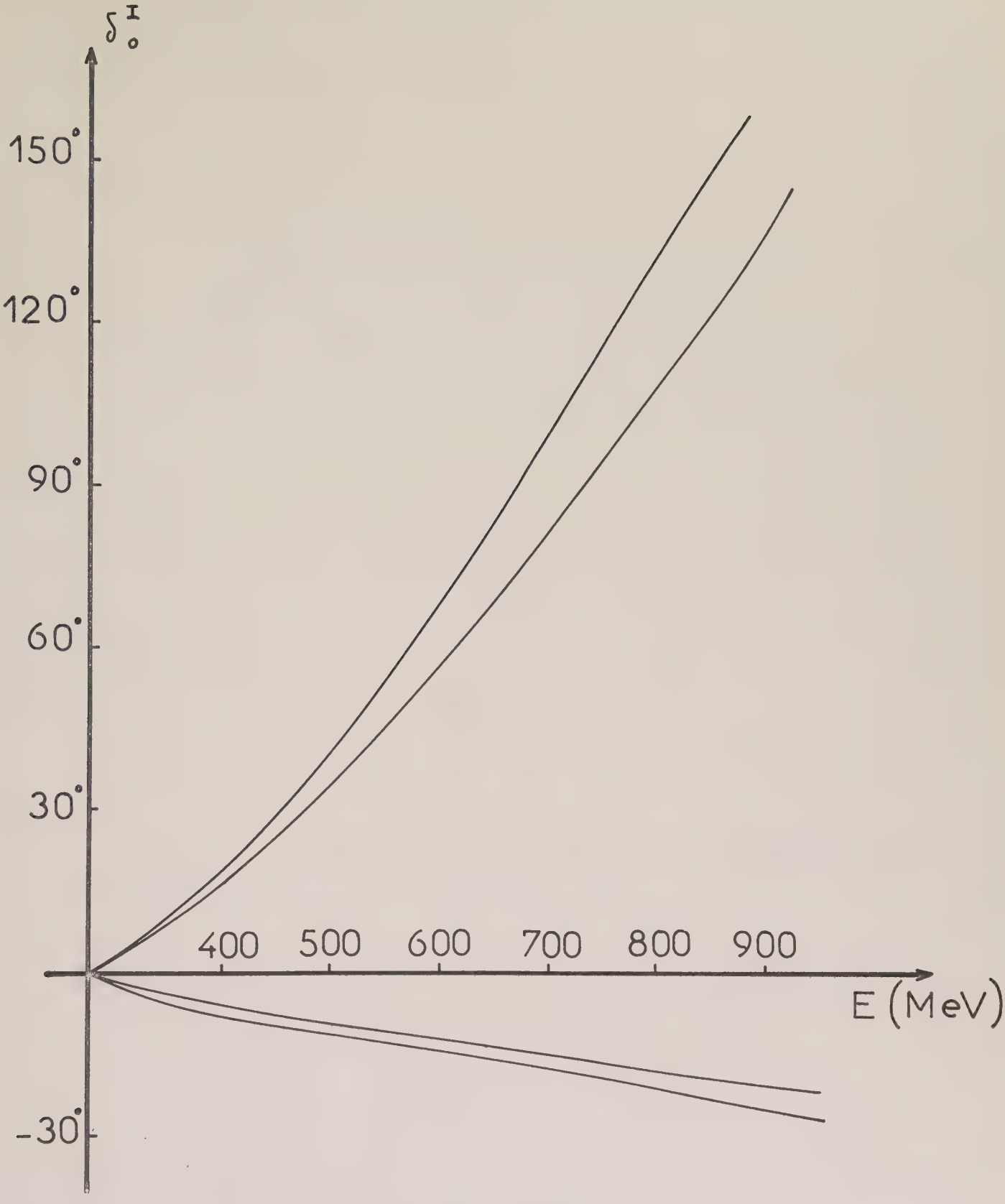
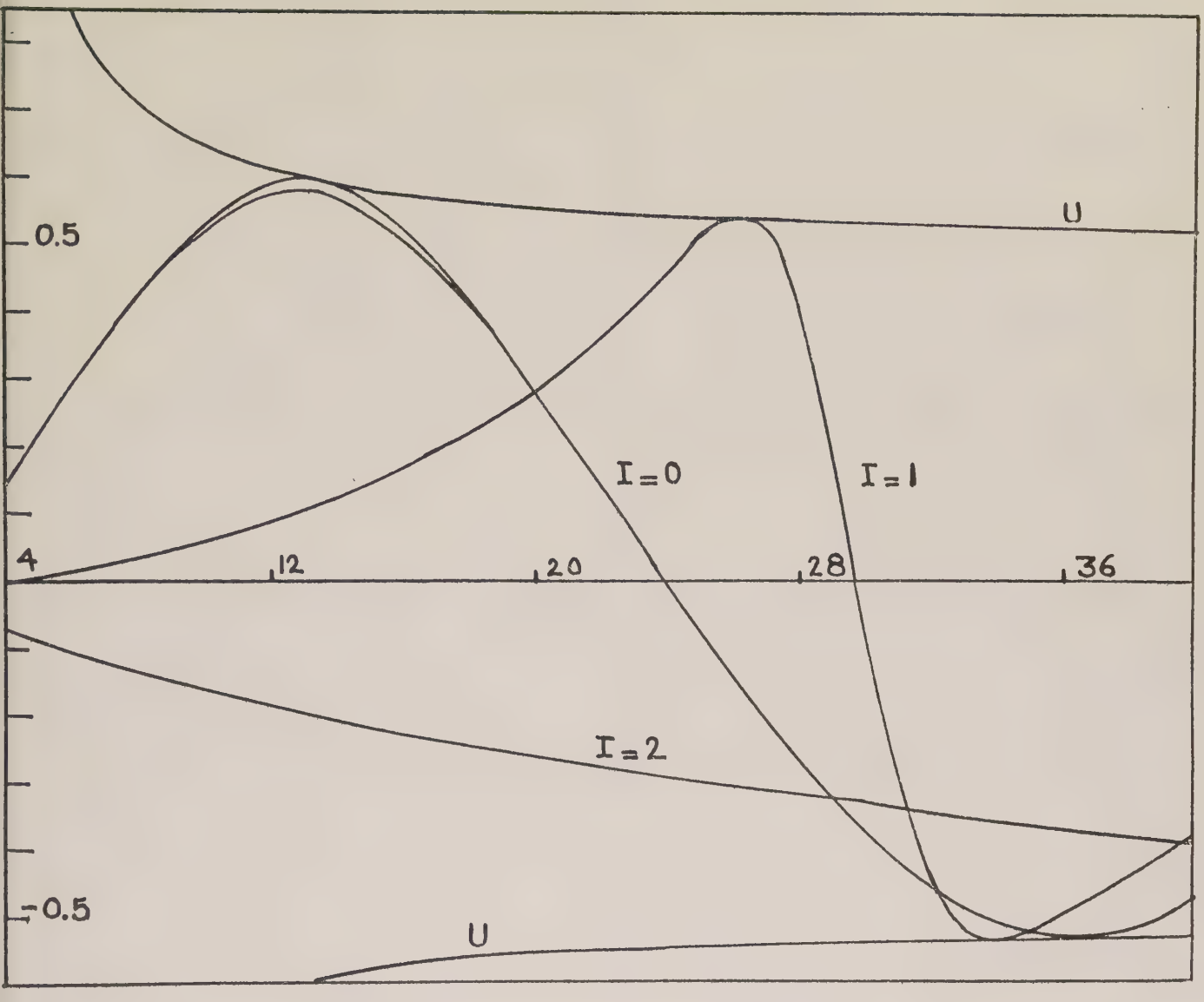


Fig. 13 a



- FIG. 13 - b -

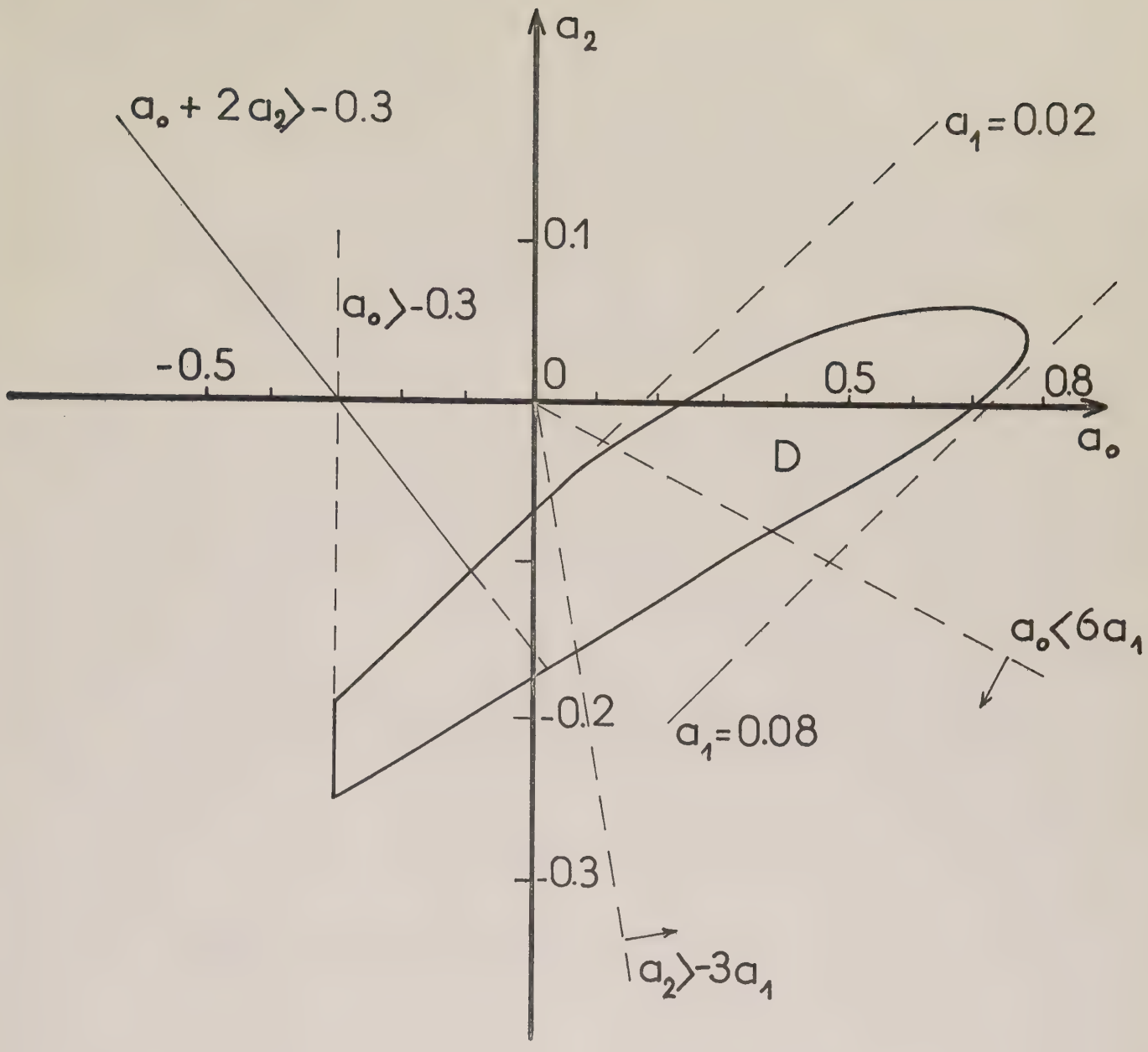


Fig. 14

ACADÉMIE DE PARIS

UNIVERSITÉ DE PARIS VI

4, Place Jussieu - 75230 PARIS-CEDEX 05

SERVICE DE LA SCOLARITE

Bureau des Enseignements du 3e cycle

TÉLÉPHONE : 336-25-25 - 325-12-21

PERMIS D'IMPRIMER

DOCTORAT : ES SCIENCES

THESE DE : PHYSIQUES

NOM : Monsieur GAURON

Prénoms : Pierre, Paul

né le 24 Janvier 19 36 à Poissy Dépt : Seine et Oise

1ère THESE : " Contribution à l'étude théorique de la diffusion méson π - méson π à l'aide des propriétés générales de la matrice S".

2e THESE (Propositions faites par l'Université) :

PRESIDENT. M. LEVY

EXAMINATEURS. MM. NATAF
VINH-MAU
MARTIN
BASDEVANT

ACADEMIE DE PARIS UNIVERSITE PARIS VI

Vu et Approuvé

PARIS, le 26 JUIN 1973

Le Président

de l'Université de PARIS VI